Լ. Ս. ԱԹԱՆԱՍՅԱՆ, Վ. Ֆ. ԲՈՒՏՈՒԶՈՎ,
Ս. Բ. ԿԱԴՈՄՑԵՎ, Է. Հ. ՊՈԶՆՅԱԿ, Ի. Ի. ՅՈՒԴԻՆԱ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

9

Լ. Ս. ԱԹԱՆԱՍՅԱՆ, Վ. Ֆ. ԲՈՒՏՈՒԶՈՎ,
Ս. Բ. ԿԱԴՈՄՑԵՎ, Է. Գ. ՊՈԶՆՅԱԿ, Ի. Ի. ՅՈՒԴԻՆԱ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

9

Դասագիրք 12–ամյա հանրակրթական
դպրոցի համար

Հաստատված է ՀՀ կրթության և գիտության նախարարության կողմից որպես դասագիրք հանրակրթական դպրոցի համար

Թարգմանված է ռուսերեն 15–րդ հրատարակությունից

Переводное издание выпущено в свет по лицензионному договору N 3/13 между ОАО "Издательство "Просвещение" и ООО "Зангак–97"

Թարգմանությունը լույս է տեսել «Իզդատելստվո «Պրոսվեշչենիե»» ԲԲԸ և «Զանգակ–97» ՍՊԸ միջև կնքված N 3/13 արտոնագրային պայմանագրի հիման

Москва
"Просвещение" 2005

Երևան
«Զանգակ–97» 2008

ՀՏԴ 373.167.1:514 (075)
ԳՄԴ 22.151 ց 72
Ե 894

Դասագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին

Թարգմանությունը, փոխադրումը և լրացումը *Մ. Է. Հակոբյանի*

В переводном издании пункт 1 в главе VIII, пункт 27 в главе IX и пункты 46, 54, 62 63 в главе XI добавлены переводчиком, и за содержание этих пунктов авторский коллектив не несет ответственности.

Թարգմանված հրատարակության գլուխ VIII–ում կետ1–ը, գլուխ IX-ում կետ 27–ը և գլուխ XI–ում 46, 54, 62, 63 կետերը ավելացվել են թարգմանչի կողմից, որոնց բովանդակության համար հեղինակային խումբը պատասխանատվություն չի կրում:

Երկրաչափություն – 9:
Ե 894 Դասագիրք հանրակրթ. դպր. 9–րդ դաս. համար/ Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ. Կադոմցև և ուրիշներ :/.– Եր.: «Զանգակ–97», 2008.– 144 էջ:

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов,
С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина

ГЕОМЕТРИЯ
Учебник для 9–го класса
(на армянском языке)
Ереван "Зангак-97" 2008

Экземпляры переводного издания подлежат распространению только в пределах территории действия лицензионного договора N3/13.
Данное издание подлежит распространению только на территории Армянской Республики и среди армянских диаспор на территории других стран.

Թարգմանության լույս տեսած օրինակները ենթակա են տարածման միայն N3/13 արտոնագրային պայմանագրի գործողության տարածքում:
Սույն հրատարակությունը ենթակա է տարածման միայն Հայաստանի Հանրապետության տարածքում և հայկական սփյուռքում:

ԳՄԴ 22.151 ց72

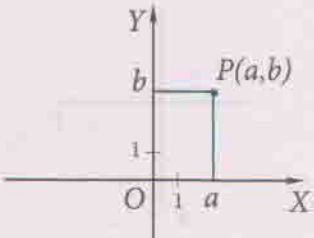
ISBN 978–99941–454–2

ԳԼՈՒԽ VIII
Կոորդինատներ և վեկտորներ

§1 ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

1. Կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ

«Կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգի» հասկացությունը մեզ հայտնի է հանրահաշվի դասընթացից: Հիշենք, որ կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ ներմուծելու համար հարկավոր է տանել երկու փոխուղղահայաց ուղիղներ, նրանցից յուրաքանչյուրի վրա ընտրել ուղղություն (այն նշանակվում է սլաքով) և հատվածների չափման միավոր կամ մասշտաբի միավոր *(նկ. 1)*: Մենք գիտենք, որ հարթության յուրաքանչյուր կետ որոշվում է երկու կոորդինատով՝ **աբսցիսով** և **օրդինատով**: Կետի աբսցիսը և օրդինատը գտնելու համար այդ կետից իջեցնում ենք ուղղահայացներ, համապատասխանաբար, Ox առանցքին և Oy առանցքին (կամ, որ նույնն է, տանում ենք զուգահեռներ Oy և Ox առանցքներին):



Նկ. 1

Գիտենք, որ կոորդինատային յուրաքանչյուր առանցք հարթությունը տրոհում է երկու *կիսահարթության*, իսկ երկու առանցքը՝ չորս *քառորդի*: Քառորդներից յուրաքանչյուրում տարբեր կետերն ունեն միևնույն նշանով կոորդինատներ:

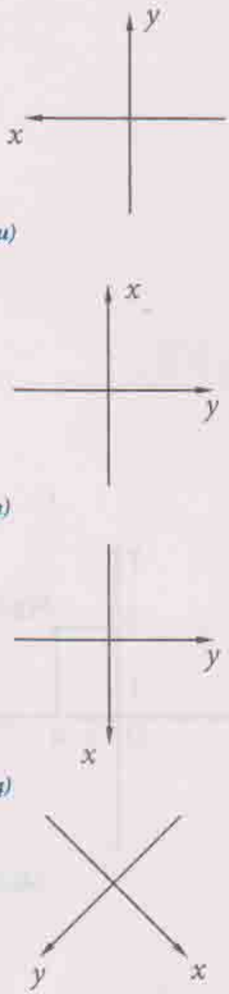
Այստեղ կարևոր է կատարել երկու դիտողություն:

1. Կոորդինատային առանցքների վրա մենք ընտրում ենք համապատասխան մասշտաբի միավոր: Հասկանալի է, որ մասշտաբն ընտրում ենք մենք, սակայն անհրաժեշտ է նշել, որ այդ ընտրությունը կատարելիս պահանջվում է ուշադրություն դարձնել որոշ հանգամանքների վրա: Դիտողություններից մեկը վերաբերում է հենց մասշտաբի ընտրությանը:

Հանրահաշվում կոորդինատային առանցքներից յուրաքանչյուրի համար, կախված մեծությունների բնույթից, կարող ենք ընտրել տարբեր մասշտաբներ: Օրինակ, եթե ուզում ենք գրաֆիկորեն պատկերել հացահատիկի գնի և զանգվածի համեմատականությունը, ապա չափման միավորները տարասեռ են (դրամ և կիլոգրամ): Ուստի նրանց համար կարող ենք ընտրել տարբեր մասշտաբներ, և դա համեմատականության պատկերման համար կարևոր դեր չի ունենա: Մինչդեռ երկրաչափության մեջ եթե Ox և Oy առանցքների համար ընտրված մասշտաբները տարբեր լինեն, ապա դժվար չէ համոզվել, որ պատկերը կձևափոխվի: Օրինակ՝ քառակուսին կպատկերվի ուղդանկյան տեսքով (եթե կողմերը վերցվեն առանցքներին զուգահեռ): Այդ դեպքում, կախված պատկերի դիրքից, կխախտվեն անկյունները, կետերի հեռավորությունները և այլն:

Այսպիսով՝ ***երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս կոորդինատային երկու առանցքների համար ընտրում ենք հենց նույն մասշտաբի միավորը:***

2. Երկրորդ դիտողությունը վերաբերում է կոորդինատային առանցքների ուղղություններին: Անշուշտ, մենք կարող ենք թղթի վրա առանցքների ուղղությունները պատկերել տարբեր կերպ, օրինակ՝ ինչպես ցույց է տրված նկար 2–ում:



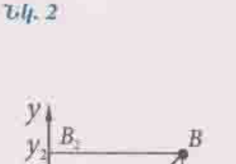
Նկ. 2

Այս նկարներում որևէ տրամաբանական սխալ չկա: Սակայն մեր գործը էապես կհեշտանա, եթե հենց սկզբից պայմանավորվենք, որ ***հորիզոնական ուղղությամբ պատկերենք աբսցիսների (Ox) առանցքը, իսկ ուղղահայաց ուղղությամբ՝ օրդինատների (Oy) առանցքը, ընդ որում՝ դեպի աջ շարժվելիս մեծանա աբսցիսը, իսկ դեպի վերև շարժվելիս՝ օրդինատը:***

2. Հատվածի միջնակետի կոորդինատները

Դիցուք՝ կոորդինատների Oxy համակարգում AB հատվածը տրված է իր ծայրակետերի կոորդինատներով՝ $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$: Պահանջվում է գտնել AB հատվածի M միջնակետի x և y կոորդինատները:

Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ AB–ն զուգահեռ չէ Oy առանցքին, այսինքն՝ $x_1 \neq x_2$: A, M և B կետերով տանենք Ox–ին ուղղահայացներ *(նկ. 3)*: Դրանք առանցքին կհատվեն $A_1(x_1, 0)$, $M_1(x, 0)$ և $B_1\ (x_2, 0)$ կետերում: Ըստ Թալեսի թեորեմի՝ A_1M_1 և M_1B_1 հատվածները հավասար են, այսինքն՝ M_1 կետը A_1B_1 հատվածի միջնակետն է: Ուստի ըստ կոորդինատային առանցքի վրա թվերի պատկերման՝ $|x - x_1| = |x - x_2|$: Հնարավոր է երկու դեպք. $x - x_1 = x - x_2$ կամ $x - x_1 = -(x - x_2)$:



Նկ. 3

Առաջին դեպքը տեղի չունի, քանի որ $x_1 \neq x_2$: Ուրեմն՝ տեղի ունի երկրորդը: Ստացվում է՝ $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$: (1)

Եթե AB հատվածը զուգահեռ է Oy առանցքին, այսինքն՝ $x_1 = x_2$, ապա A_1, M_1, B_1 կետերն ունեն նույն աբսցիսը՝ $x_1 = x = x_2$: Իսկ դա նշանակում է, որ (1) բանաձևը ճիշտ է նաև այդ դեպքում:

Նույն կերպ ստացվում է, որ $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$: (2)

Խնդիր: ON հատվածի միջնակետը $M(3, 8)$ կետն է: Գտնել N կետի կոորդինատները:

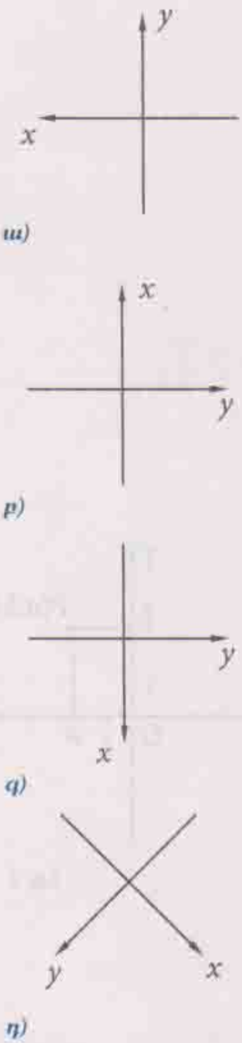
Լուծում: O սկզբնակետի կոորդինատներն են՝ $x_1 = 0$, $y_1 = 0$:

ղանկյան տեսքով (եթե կողմերը վերցվեն առանցքներին զուգահեռ): Այդ դեպքում, կախված պատկերի դիրքից, կխախտվեն անկյունները, կետերի հեռավորությունները և այլն:

Այսպիսով՝ ***երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս կոորդինատային երկու առանցքների համար ընտրում ենք հենց նույն մասշտաբի միավորը:***

2. Երկրորդ դիտողությունը վերաբերում է կոորդինատային առանցքների ուղղություններին: Անշուշտ, մենք կարող ենք թղթի վրա առանցքների ուղղությունները պատկերել տարբեր կերպ, օրինակ՝ ինչպես ցույց է տրված նկար 2–ում:

Այս նկարներում որևէ տրամաբանական սխալ չկա: Սակայն մեր գործը էապես կհեշտանա, եթե հենց սկզբից պայմանավորվենք, որ ***հորիզոնական ուղղությամբ պատկերենք աբսցիսների (Ox) առանցքը, իսկ ուղղահայաց ուղղությամբ՝ օրդինատների (Oy) առանցքը, ընդ որում՝ դեպի աջ շարժվելիս մեծանա աբսցիսը, իսկ դեպի վերև շարժվելիս՝ օրդինատը:***



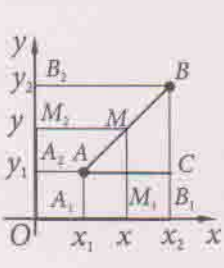
Նկ. 2

2. Հատվածի միջնակետի կոորդինատները

Դիցուք՝ կոորդինատների Oxy համակարգում AB հատվածը տրված է իր ծայրակետերի կոորդինատներով՝ $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$: Պահանջվում է գտնել AB հատվածի M միջնակետի x և y կոորդինատները:

Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ AB–ն զուգահեռ չէ Oy առանցքին, այսինքն՝ $x_1 \neq x_2$: A, M և B կետերով տանենք Ox–ին ուղղահայացներ *(նկ. 3)*: Դրանք առանցքին կհատվեն $A_1(x_1, 0)$, $M_1(x, 0)$ և $B_1\ (x_2, 0)$ կետերում: Ըստ Թալեսի թեորեմի՝ A_1M_1 և M_1B_1 հատվածները հավասար են, այսինքն՝ M_1 կետը A_1B_1 հատվածի միջնակետն է: Ուստի ըստ կոորդինատային առանցքի վրա թվերի պատկերման՝ $|x - x_1| = |x - x_2|$: Հնարավոր է երկու դեպք. $x - x_1 = x - x_2$ կամ $x - x_1 = -(x - x_2)$:

Առաջին դեպքը տեղի չունի, քանի որ $x_1 \neq x_2$: Ուրեմն՝ տեղի ունի երկրորդը: Ստացվում է՝ $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$:   (1)



Նկ. 3

Եթե AB հատվածը զուգահեռ է Oy առանցքին, այսինքն՝ $x_1 = x_2$, ապա A_1, M_1, B_1 կետերն ունեն նույն աբսցիսը՝ $x_1 = x = x_2$: Իսկ դա նշանակում է, որ (1) բանաձևը ճիշտ է նաև այդ դեպքում:

Նույն կերպ ստացվում է, որ $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$:   (2)

Խնդիր: ON հատվածի միջնակետը $M(3, 8)$ կետն է: Գտնել N կետի կոորդինատները:

Լուծում: O սկզբնակետի կոորդինատներն են՝ $x_1 = 0$, $y_1 = 0$:

(1) և (2) բանաձևերի մեջ տեղադրենք $x = 3$ և $y = 8$, կստանանք՝

$3 = \frac{0 + x_2}{2}$, $8 = \frac{0 + y_2}{2}$, որտեղից՝ $x_2 = 6$, $y_2 = 16$: Այսպիսով՝ N կետի կոորդինատները (6, 16) թվազույգն է:

Խնդիր: Գտնել $A(a, b)$ կետի՝ կոորդինատային սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ B կետի կոորդինատները:

Լուծում: Նկատի ունենանք, որ $A(a, b)$ կետը և որոնելի $B(x, y)$ կետը համաչափ են կոորդինատային սկզբնակետի նկատմամբ, այսինքն՝ $O(0, 0)$ կետը AB հատվածի միջնակետն է: Օգտվելով

(1) և (2) բանաձևերից՝ կարող ենք գրել $\frac{a + x}{2} = 0$ և $\frac{b + y}{2} = 0$,

որտեղից ստանում ենք $x = -a$ և $y = -b$: Այսպիսով՝ B կետի կոորդինատներն են $(-a, -b)$ թվազույգը:

3. Կետերի հեռավորությունը կոորդինատներով

Դիցուք՝ Oxy կոորդինատային հարթության վրա տրված են $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$ կետերը: A և B կետերի հեռավորությունը (AB հատվածի երկարությունը) արտահայտենք այդ կետերի կոորդինատներով:

Նախ քննության առնենք այն դեպքը, երբ $x_1 \neq x_2$ և $y_1 \neq y_2$: A և B կետերով տանենք կոորդինատային առանցքներին զուգահեռ ուղիղներ: Առաջանում է ACB ուղղանկյուն եռանկյունը (տես նկ. 3): Որոշենք դրա էջերի երկարությունները.

$AC = A_1B_1 = |x_2 - x_1|$, $BC = B_2A_2 = |y_2 - y_1|$:

Այժմ օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից՝ ստանում ենք AB ներքնաձիգի d_{AB} երկարությունը.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (3)$$

Եթե ընդունենք, որ $x_1 = x_2$ կամ $y_1 = y_2$, ապա հեշտ է համոզվել, որ (3) բանաձևը ճիշտ է նաև այդ դեպքում: Իրոք, եթե, ասենք, $x_1 = x_2$ և $y_1 \neq y_2$, ապա $d_{AB} = |y_2 - y_1|$, բայց նույն արդյունքին է հանգեցնում նաև (3) բանաձևը: Մասնավորապես, եթե A և B կետերը համընկնում են, այսինքն՝ $x_1 = x_2$ և $y_1 = y_2$, ապա $d_{AB} = 0$:

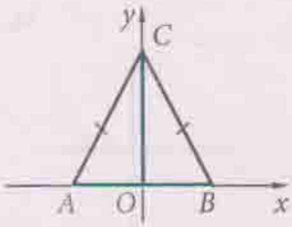
Խնդիր: Գտնել ABC եռանկյան AM միջնագծի երկարությունը, եթե տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(1, 2)$, $B(7, 3)$ և $C(1, 9)$:

Լուծում: Նախ գտնենք BC կողմի M միջնակետի x_0 և y_0 կոորդինատները: Օգտվելով (1) և (2) բանաձևերից՝ ստանում ենք.

$x_0 = \frac{7 + 1}{2} = 4$, $y_0 = \frac{3 + 9}{2} = 6$: Այժմ գտնենք $A(1,2)$ և $M(4,6)$ կետերի հեռավորությունը՝ օգտվելով (3) բանաձևից.

$$d_{AM} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

Խնդիրներ



Նկ. 4

1. A կետը գտնվում է Ox դրական կիսառանցքի, իսկ B կետը՝ Oy դրական կիսառանցքի վրա: Գտեք ABO եռանկյան գագաթների կոորդինատները, եթե՝ ա) $OA = 5$, $OB = 3$, բ) $OA = a$, $OB = b$:

2. A կետը գտնվում է Ox դրական կիսառանցքի, իսկ B կետը՝ Oy դրական կիսառանցքի վրա: Գտեք $OACB$ ուղղանկյան գագաթների կոորդինատները, եթե՝ ա) $OA = 6{,}5$, $OB = 3$, բ) $OA = a$, $OB = b$:

3. $MNPQ$ քառակուսին գծեք այնպես, որ P գագաթն ունենա $(-3,\ 3)$ կոորդինատները, իսկ անկյունագծերը հատվեն կոորդինատների սկզբնակետում: Գտեք M, N և Q կետերի կոորդինատները:

4. Գտեք նկար 4-ում պատկերված ABC հավասարասրուն եռանկյան գագաթների կոորդինատները, եթե $AB = 2a$, իսկ CO բարձրությունը հավասար է h-ի:

5. Գտեք $ABCD$ զուգահեռագծի D գագաթի կոորդինատները, եթե $A(0,\ 0)$, $B(5,\ 0)$, $C(12,\ -3)$:

6. Աղյուսակը գծեք տետրում և օգտվելով AB հատվածի M միջնակետի կոորդինատները հաշվելու բանաձևերից՝ լրացրեք դատարկ վանդակները.

A	$(2,-3)$		$(0,1)$	$(0,0)$	$(c,\ d)$	$(3,5)$	$(3t+5,7)$	$(1,3)$
B	$(-3,1)$	$(4,7)$		$(-3,7)$		$(3,8)$	$(t+7,-7)$	
M		$(-3,-2)$	$(3,-5)$		(a,b)			$(0,0)$

7. Տրված են $A(0,\ 1)$ և $B(5,\ -3)$ կետերը: Գտեք C և D կետերի կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ B կետը AC հատվածի միջնակետն է, իսկ D կետը՝ BC հատվածի միջնակետը:

8. Գտեք $M(3,\ -2)$ կետի հեռավորությունը՝ ա) աբսցիսների առանցքից, բ) օրդինատների առանցքից, գ) կոորդինատների սկզբնակետից:

9. Գտեք A և B կետերի հեռավորությունը, եթե՝ ա) $A(2,\ 7)$, $B(-2,\ 7)$, բ) $A(-5,\ 1)$, $B(-5,\ -7)$, գ) $A(-3,\ 0)$, $B(0,\ 4)$, դ) $A(0,\ 3)$, $B(-4,\ 0)$:

10. Գտեք MNP եռանկյան պարագիծը, եթե $M(4,\ 0)$, $N(12,\ -2)$, $P(5,\ -9)$:

11. Գտեք x-ը, եթե՝ ա) $A(2,\ 3)$ և $B(x,\ 1)$ կետերի հեռավորությունը 2 է, բ) $M_1(-1,\ x)$ և $M_2(2x,\ 3)$ կետերի հեռավորությունը 7 է:

12. Ապացուցեք, որ ABC եռանկյունը հավասարասրուն է, եթե նրա գագաթներն ունեն հետևյալ կոորդինատները. ա) $A(0, 1)$, $B(1, -4)$, $C(5, 2)$, բ) $A(-4, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(0, 1)$:

13. Օրդինատների առանցքի վրա գտեք այնպիսի կետ, որը հավասարահեռ լինի հետևյալ կետերից. ա) $A(-3, 5)$ և $B(6, 4)$, բ) $C(4, -3)$ և $D(8, 1)$:

14. Աբսցիսների առանցքի վրա գտեք այնպիսի կետ, որը հավասարահեռ լինի հետևյալ կետերից. ա) $A(1, 2)$ և $B(-3, 4)$, բ) $C(1, 1)$ և $D(3, 5)$:

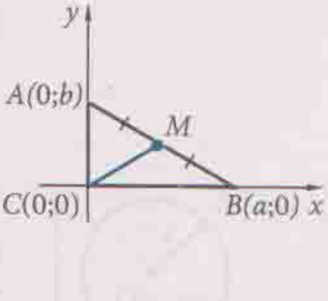
15. Ապացուցեք, որ $MNPQ$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, և գտեք նրա անկյունագծերը, եթե՝ ա) $M(1, 1)$, $N(6, 1)$, $P(7, 4)$, $Q(2, 4)$, բ) $M(-5, 1)$, $N(-4, 4)$, $P(-1, 5)$, $Q(-2, 2)$:

16. Ապացուցեք, որ $ABCD$ քառանկյունն ուղղանկյուն է, և գտեք նրա մակերեսը, եթե՝ ա) $A(-3, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, -3)$, $D(-3, -3)$, բ) $A(4, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 4)$, $D(0, 0)$:

Կոորդինատների մեթոդի կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս

Կոորդինատային համակարգի ներմուծման միջոցով հնարավոր է դառնում երկրաչափական խնդիրը արտահայտել հանրահաշվի լեզվով, և այն լուծել հանրահաշվի բանաձևերի կիրառությամբ: Մասնավորապես, հատվածի միջնակետի կոորդինատների և երկու կետերի հեռավորության բանաձևերը կարելի է օգտագործել երկրաչափական ավելի բարդ խնդիրներ լուծելիս: Դրա համար անհրաժեշտ է ներմուծել կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ և խնդրի պայմանը գրել կոորդինատներով: Դրանից հետո խնդիրը լուծվում է հանրահաշվական հաշվումներով:

17. ***Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի միջնակետը հավասարահեռ է նրա բոլոր գագաթներից:***



Նկ. 5

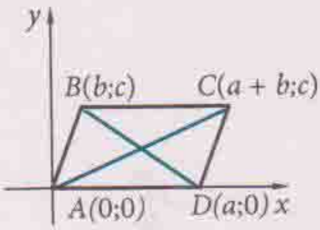
Լուծում: Դիտարկենք C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյունը: M տառով նշանակենք BC ներքնաձիգի միջնակետը: Ներմուծենք կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ, ինչպես ցույց է տրված նկար 5–ում: Եթե $BC = a$, $AC = b$, ապա եռանկյան գագաթներն ունեն հետևյալ կոորդինատները. $C(0, 0)$, $B(a, 0)$, $A(0, b)$: Ըստ հատվածի միջնակետի կոորդինատների հաշվման բանաձևի՝ գտնում ենք M կետի կոորդինատները՝ $M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$: Գտնենք MC և MA հատվածների երկարությունները՝ օգտվելով երկու կետերի հեռավորության բանաձևից.

$$MC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$MA = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\ :$$

Այսպիսով՝ $MA = MB = MC$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

18. ***Ապացուցել, որ զուգահեռագծի բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարը հավասար է անկյունագծերի քառակուսիների գումարին:***



Նկ. 6

Լուծում: Դիցուք $ABCD$–ն տրված զուգահեռագիծն է: Կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգը ներմուծենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկար 6–ում: Եթե $AD = BC = a$, իսկ B կետի կոորդինատներն են (b, c), ապա D կետը կունենա $(a, 0)$, իսկ C կետը՝ $(a + b, c)$ կոորդինատները: Օգտագործելով երկու կետերի հեռավորության բանաձևը՝ ստանում ենք.

$AB^2 = b^2 + c^2$, $AD^2 = a^2$, $AC^2 = (a+b)^2 + c^2$, $BD^2 = (a-b)^2 + c^2$:

Այստեղից ստացվում է.

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AB^2 + AD^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$,

$AC^2 + BD^2 = (a+b)^2 + c^2 + (a-b)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$:

Այսպիսով՝ $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

19. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարած միջնագիծը հավասար է 160 սմ, իսկ եռանկյան հիմքը՝ 80 սմ: Գտեք այդ եռանկյան մյուս երկու միջնագծերը:

20. Եռանկյան՝ 10 սմ–ի հավասար բարձրությունը հիմքը տրոհում է երկու հատվածի, որոնք հավասար են 10 սմ և 4 սմ: Գտեք մյուս երկու կողմերից փոքրին տարված միջնագիծը:

21. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերը հավասար են: Ձևակերպեք և ապացուցեք հակադարձ պնդումը:

22. Ապացուցեք, որ ուղղանկյան անկյունագծերը հավասար են:

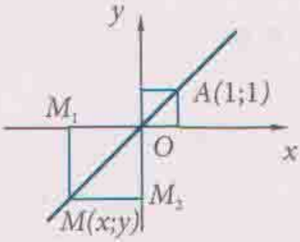
23. Ապացուցեք, որ եթե զուգահեռագծի անկյունագծերը հավասար են, ապա այդ զուգահեռագիծը ուղղանկյուն է:

§2 ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ԵՎ ՈՒՂՂԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

4. Հարթության վրա գծի հավասարումը

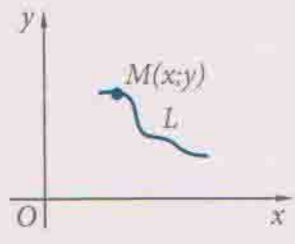
Քննության առնենք հարթության վրա կոորդինատների մեթոդի կիրառության մի քանի այնպիսի օրինակներ, որոնցով ավելի ակնառու է դառնում երկրաչափության և հանրահաշվի միջև եղած կապը:

Հանրահաշվի դասընթացում մենք կառուցել ենք որոշ հավասարումների գրաֆիկները կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում, օրինակ՝ $y = x$ հավասարման գրաֆիկը: Հայտնի է, որ այդ հավասարման գրաֆիկը ուղիղ է, որն անցնում է $O(0;\ 0)$ և $A(1;\ 1)$ կետերով *(նկ. 7)*: OA ուղղի վրա ընկած կամայական $M(x;\ y)$ կետի կոորդինատները բավարարում են $y = x$ հավասարմանը (քանի որ $MM_1 = MM_2$), իսկ OA ուղղի վրա չընկած ցանկացած կետի կոորդինատներն այդ հավասարմանը չեն բավարարում: Այդ դեպքում ասում են, որ $y = x$ հավասարումը OA ուղղի հավասարումն է: Համանման ձևով ներմուծվում է կամայական գծի հավասարման հասկացությունը:



Նկ. 7

Դիցուք՝ հարթության վրա ներմուծված է Oxy ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգը, և տրված է որևէ L գիծ *(նկ. 8)*: x և y երկու փոփոխականով հավասարումը կոչվում է L գծի հավասարում, եթե այդ հավասարմանը բավարարում են L գծի ցանկացած կետի կոորդինատները, և չեն բավարարում այդ գծի վրա չընկած ոչ մի կետի կոորդինատներ:

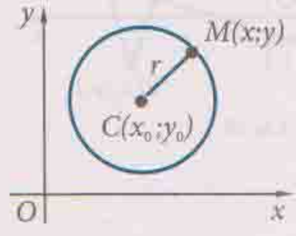


Նկ. 8

Գծերը կոորդինատների մեթոդով հետազոտելիս առաջանում են երկու՝ փոխհակադարձ խնդիրներ. 1) տրված գծի երկրաչափական հատկությունների միջոցով գտնել նրա հավասարումը, 2) գծի՝ տրված հավասարման միջոցով հետազոտել նրա երկրաչափական հատկությունները: Այդ խնդիրներից առաջինը այստեղ մենք կդիտարկենք շրջանագծի և ուղղի համար, իսկ երկրորդ խնդիրը դիտարկվում է հանրահաշվի դասընթացում՝ ֆունկցիայի գրաֆիկներ կառուցելիս:

5. Շրջանագծի հավասարումը

Դիցուք՝ Oxy կոորդինատային հարթության մեջ տրված r շառավիղով շրջանագծի կենտրոնը C կետն է, որն այդ հարթությունում ունի $(x_0;\ y_0)$ կոորդինատները *(նկ. 9)*: Տվյալ հարթության կամայական $M(x;\ y)$ կետի և $C(x_0;\ y_0)$ կենտրոնի հեռավորությունը որոշվում է $CM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ բանաձևով:



Նկ. 9

Եթե M կետն ընկած է C կենտրոնով շրջանագծի վրա, ապա $MC=r$, կամ՝ $MC^2 = r^2$: Ուրեմն՝ M կետի կոորդինատները բավարարում են $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ հավասարմանը:

Եթե $M(x; y)$ կետն ընկած չէ տրված շրջանագծի վրա, ապա $MC^2 \neq r^2$, ուրեմն, M կետի կոորդինատները տվյալ հավասարմանը չեն բավարարում: Հետևաբար Oxy ***կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում r շառավիղով և $C(x_0; y_0)$ կենտրոնով շրջանագծի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.***

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad (4)$$

Մասնավորապես, եթե շրջանագծի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, ապա հավասարումն ունի այսպիսի տեսք.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Խնդիր: *Գրենք այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, իսկ կենտրոնը $(-3, 4)$ կետն է:*

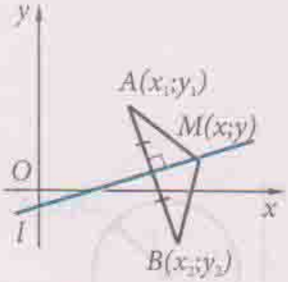
Լուծում: Շրջանագծի կենտրոնն ունի $(-3, 4)$ կոորդինատները: Ուրեմն, այդ շրջանագծի հավասարումն ունի $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ տեսքը, որտեղ r-ը դեռևս անհայտ շառավիղն է: Որպեսզի գտնենք շառավիղը, օգտվենք այն բանից, որ շրջանագիծն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, այսինքն՝ $O(0, 0)$ կետը բավարարում է շրջանագծի հավասարմանը: Այսպիսով՝ հավասարումը ստանում է հետևյալ տեսքը. $(0 + 3)^2 + (0 - 4)^2 = r^2$: Այդտեղից՝ $r^2 = 25$ և, ուրեմն, $r = 5$: Հետևաբար, շրջանագծի որոնելի հավասարումն է. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$:

Եթե հավասարման մեջ բացենք փակագծերը և կատարենք նման անդամների միացում, ապա ստացվում է $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ հավասարումը, որը նույնպես տվյալ շրջանագծի հավասարումն է:

6. Ուղղի հավասարումը

Արտածենք տրված l ուղղի հավասարումը հարթության վրա ներմուծված ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգում: Նշենք $A(x_1; y_1)$ և $B(x_2; y_2)$ երկու կետերն այնպես, որ l ուղիղը լինի AB հատվածի միջնուղղահայացը *(նկ. 10)*: Եթե $M(x; y)$ կետն ընկած է l ուղղի վրա, ապա $AM = BM$, կամ՝ $AM^2 = BM^2$, այսինքն՝ M կետի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ հավասարմանը.

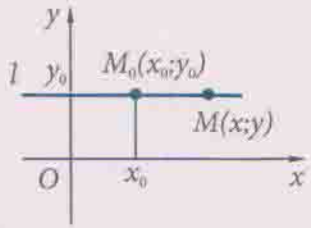
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \qquad (5)$$



Նկ. 10

Եթե $M(x; y)$ կետն ընկած չէ l ուղղի վրա, ապա $AM^2 \neq BM^2$ և, ուրեմն, M կետի կոորդինատները (5) հավասարմանը չեն բավարարում: Հետևաբար՝ (5) հավասարումը l ուղղի հավասարումն է կոորդինատների տրված համակարգում:

Կատարելով պարզ ձևափոխություններ՝ (5) հավասարումն ընդունում է $ax + by + c = 0$ տեսքը, որտեղ $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$: Քանի որ $A(x_1; y_1)$ և $B(x_2; y_2)$ կետերը միմյանցից տարբեր են, ապա $(x_1 - x_2)$ և $(y_1 - y_2)$ տարբերություններից գոնե մեկը զրո չէ, այսինքն՝ a և b գործակիցներից առնվազն մեկը տարբեր է զրոյից: Այսպիսով՝ ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգում **ուղղի հավասարումը առաջին աստիճանի հավասարում է:**



Նկ. 11

Դժվար չէ համոզվել, որ եթե l ուղիղն անցնում է $M_0(x_0; y_0)$ կետով և զուգահեռ է Ox առանցքին, ապա նրա հավասարումն է՝ $y = y_0$ (նկ. 11), իսկ եթե ուղիղն անցնում է $M_0(x_0; y_0)$ կետով և զուգահեռ է Oy առանցքին, ապա նրա հավասարումն է՝ $x = x_0$: Մասնավորապես՝ Ox առանցքի հավասարումն է՝ $y = 0$, իսկ Oy առանցքի հավասարումը՝ $x = 0$:

Հարցեր և խնդիրներ

24. Գծագրեք այն շրջանագիծը, որը տրված է հետևյալ հավասարումով. ա) $x^2 + y^2 = 9$, բ) $(x - 1)^2 + (y + 2) = 4$, գ) $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$, դ) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, ե) $x^2 + (y + 2)^2 = 16$:

25. $A(3; -4)$, $B(1; 0)$, $C(0; 5)$, $D(0; 0)$ և $E(0; 1)$ կետերից որո՞նք են ընկած այն շրջանագծի վրա, որը տրված է հետևյալ հավասարումով. ա) $x^2 + y^2 = 25$, բ) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$, գ) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$:

26. Շրջանագիծը տրված է $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 16$ հավասարումով: Առանց գծագրից օգտվելու նշեք, թե $A(-2; 4)$, $B(-5; -3)$, $C(-7; -2)$ և $D(1; 5)$ կետերից որո՞նք են ընկած՝ ա) տրված շրջանագծով եզերված շրջանի ներսում, բ) շրջանագծի վրա, գ) տրված շրջանագծով եզերված շրջանից դուրս:

27. Տրված են $x^2 + y^2 = 25$ շրջանագիծն ու $A(3; 4)$ և $B(4; -3)$ երկու կետերը: Ապացուցեք, որ AB–ն տրված շրջանագծի լար է:

28. Գտեք $x^2 + y^2 = 25$ հավասարումով տրված շրջանագծի վրա ընկած այն կետերը, որոնց՝ ա) աբսցիսը -4 է, բ) օրդինատը 3 է:

29. Գտեք $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$ հավասարումով տրված շրջանագծի վրա ընկած այն կետերը, որոնց՝ ա) աբսցիսը 3 է, բ) օրդինատը 5 է:

30. Գտեք այն շրջանագծերի հավասարումները, որոնց կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ շառավիղներն են՝ $r_1 = 3$, $r_2 = \sqrt{2}$, $r_3 = \frac{5}{2}$:

31. Գրեք r շառավիղով և A կենտրոնով շրջանագծի հավասարումը, եթե՝ ա) $A(0;\ 5)$, $r = 3$, բ) $A(-1;\ 2)$, $r = 2$, գ) $A(-3;\ -7)$, $r = \frac{1}{2}$, դ) $A(4;\ -3)$, $r = 10$:

32. Գրեք այն շրջանագծի հավասարումը, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, և որն անցնում է $B(-1;\ 3)$ կետով:

33. Գրեք MN տրամագծով շրջանագծի հավասարումը, եթե՝ ա) $M(-3;\ 5)$, $N(7;\ -3)$, բ) $M(2;\ -1)$, $N(4;\ 3)$:

34. Գրեք $A(1;\ 3)$ կետով անցնող շրջանագծի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ շրջանագծի կենտրոնն ընկած է աբսցիսների առանցքի վրա, իսկ շառավիղը 5 է: Քանի՞ այդպիսի շրջանագիծ գոյություն ունի:

35. Գրեք $A(-3;\ 0)$ և $B(0;\ 9)$ կետերով անցնող շրջանագծի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ շրջանագծի կենտրոնն ընկած է օրդինատների առանցքի վրա:

36. Գծագրեք այն ուղիղը, որը տրված է հետևյալ հավասարումով. ա) $y = 3$, բ) $x = -2$, գ) $y = -4$, դ) $x = 7$, ե) $x - 2y = 0$, զ) $3x - y + 1 = 0$:

37. Գրեք այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է տրված երկու կետերով. ա) $A(1;\ -1)$ և $B(-3;\ 2)$, բ) $C(2;\ 5)$ և $D(5;\ 2)$, գ) $M(0;\ 1)$ և $N(-4;\ -5)$:

Լուծում: ա) AB ուղղի հավասարումն ունի $ax + by + c = 0$ տեսքը: Քանի որ A և B կետերն ընկած են AB ուղղի վրա, ապա նրանց կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը.

$a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c = 0,\quad a \cdot (-3) + b \cdot 2 + c = 0,$

կամ՝ $a - b + c = 0,\quad -3a + 2b + c = 0$:

Այս հավասարումներից a և b գործակիցներն արտահայտենք c-ով. $a = 3c$, $b = 4c$: Այս արժեքները տեղադրելով ուղղի հավասարման մեջ՝ կստանանք $3cx + 4cy + c = 0$: Ստացված հավասարումը ցանկացած $c \neq 0$ դեպքում ներկայացնում է AB ուղղի հավասարումը: Կրճատելով c-ն՝ որոնելի հավասարումը կգրենք $3x + 4y + 1 = 0$ տեսքով:

38. Տրված են ABC եռանկյան գագաթների կոորդինատները. $A(4;\ 6)$, $B(-4;\ 0)$, $C(-1;\ -4)$: Գրեք CM միջնագիծն ընդգրկող ուղղի հավասարումը:

39. Տրված են $ABCD$ սեղանի գագաթների կոորդինատները. $A(-2;\ -2)$, $B(-3;\ 1)$, $C(7;\ 7)$, $D(3;\ 1)$: Գրեք այն ուղիղների հավասարումները, որոնք ընդգրկում են՝ ա) AC և BD անկյունագծերը, բ) սեղանի միջին գիծը:

40. Գտեք $4x + 3y - 6 = 0$ և $2x + y - 4 = 0$ ուղիղների հատման կետի կոորդինատները:

41. Գտեք $M(2;\ 5)$ կետով անցնող և կոորդինատների առանցքներին զուգահեռ ուղիղների հավասարումները:

42. Գտեք այն M կետի օրդինատը, որն ընկած է AB ուղղի վրա, եթե հայտնի է, որ $A(-8;\ -6)$, $B(-3;\ -1)$, և M կետի աբսցիսը 5 է:

43. Գրեք այն ուղիղների հավասարումները, որոնք ընդգրկում են 10 սմ և 4 սմ անկյունագծերով շեղանկյան կողմերը, եթե հայտնի է, որ այդ շեղանկյան անկյունագծերն ընկած են կոորդինատների առանցքների վրա:

44. Պարզեք, թե տրված հավասարումներից որոնք են շրջանագծի հավասարում: Գտեք շրջանագծերից յուրաքանչյուրի շառավիղը և կենտրոնի կոորդինատները.

ա) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$,

բ) $x^2+(y+7)^2=1$,

գ) $x^2+y^2+8x-4y+40=0$,

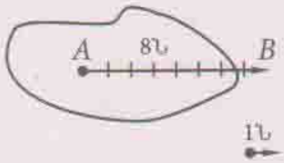
դ) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$,

ե) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$:

§3 ՎԵԿՏՈՐԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

7. Վեկտորի հասկացությունը

Բազմաթիվ ֆիզիկական մեծություններ, օրինակ՝ ուժը, նյութական կետի տեղափոխությունը, արագությունը, բնութագրվում են ոչ միայն թվային արժեքով, այլև տարածության մեջ ունեցած ուղղությունով: Այդպիսի ֆիզիկական մեծությունները կոչվում են *վեկտորական մեծություններ* (կամ հակիրճ՝ *վեկտորներ*):



Նկ. 12

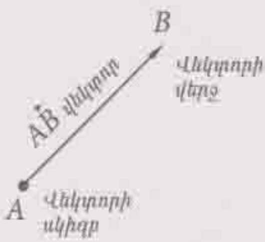
Դիտարկենք մի օրինակ: Դիցուք՝ մարմնի վրա ազդում է 8 Ն ուժ: Նկարում ուժը պատկերում են հատվածով, որի ծայրին նշվում է սլաք *(նկ. 12)*: Սլաքը ցույց է տալիս ուժի ուղղությունը, իսկ հատվածի երկարությունը համապատասխանում է ուժի թվային արժեքին՝ ըստ ընտրած մասշտաբի: Այսպես՝ նկար 12-ում 1 Ն ուժը պատկերված է 0,4 սմ երկարությամբ հատվածով, ուրեմն՝ 8 Ն ուժը պատկերվում է 3,2 սմ երկարությամբ հատվածով:

Վերանալով ֆիզիկական վեկտորական մեծությունների որոշ կոնկրետ հատկություններից՝ մենք հանգում ենք վեկտորի երկրաչափական հասկացությանը:

Նկ. 13

Դիտենք կամայական հատված: Նրա վրա կարելի է նշել երկու ուղղություն՝ մի ծայրից մյուսը և հակառակը *(նկ. 13)*: Որպեսզի ընտրենք այդ ուղղություններից մեկը, հատվածի մի ծայրն անվանենք *սկիզբ* (կամ *սկզբնակետ*), իսկ մյուսը՝ *վերջ* (կամ *վերջնակետ*), և հաշվի առնենք, որ հատվածն ուղղված է սկզբից դեպի վերջը:

Սահմանում: ***Այն հատվածը, որի համար նշված է, թե նրա ծայրերից որն է սկիզբը, և որը՝ վերջը, կոչվում է ուղղորդված հատված կամ վեկտոր:***



Նկ. 14

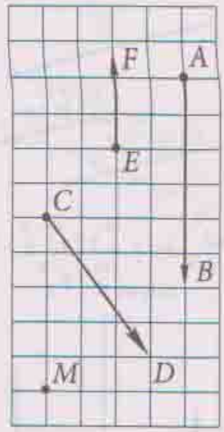
Նկարներում վեկտոր պատկերում են հատվածով՝ նրա վրա նշելով սլաք, որը ցույց է տալիս այդ վեկտորի ուղղությունը: Վեկտորները նշանակվում են լատինական երկու մեծատառով, որոնց վերևում դրվում է գծիկով սլաք, օրինակ՝ $\overrightarrow{AB}$: Առաջին տառը նշանակում է վեկտորի սկիզբը, իսկ երկրորդը՝ վերջը *(նկ. 14)*: Այսպիսով՝ տվյալ նշանակման դեպքում A և B տառերին վերագրվում են տարբեր դերեր: $\overrightarrow{AB}$ վեկտորը հատկապես հենց դրանով է տարբերվում AB հատվածից:

Նկար 15(ա)-ում պատկերված են $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ վեկտորները. A, C և E կետերը այդ վեկտորների սկզբնակետերն են, իսկ B, D և F կետերը՝ նրանց վերջնակետերը: Վեկտորները հաճախ նշանակվում են նաև լատինական փոքրատառերով, այդ դեպքում գրվում է մեկ փոքրատառ և նրա վերևում դրվում է գծիկով սլաք, օրինակ՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *(նկ. 15(բ))*:

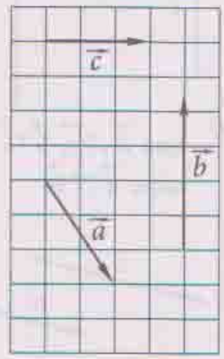
Հետագայի համար նպատակահարմար է պայմանավորվել, որ հարթության յուրաքանչյուր կետը դիտվում է որպես վեկտոր: Այդ դեպքում վեկտորը կոչվում է *զրոյական* վեկտոր: Զրոյական վեկտորի սկիզբը և վերջը համընկնում են. այդպիսի վեկտորը նկարում պատկերված է մեկ կետով: Օրինակ՝ եթե զրոյական վեկտոր պատկերող կետը նշանակված է M տառով, ապա տվյալ զրոյական վեկտորը նշանակվում է $\overrightarrow{MM}$ *(նկ. 15(ա))*: Զրոյական վեկտորը նշանակվում է նաև $\vec{0}$ պայմանանշանով: Նկար 15(ա)-ում $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ վեկտորները ոչ զրոյական են, իսկ $\overrightarrow{MM}$ վեկտորը զրոյական է:

Ոչ զրոյական $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի *երկարություն* կամ *մոդուլ* կոչվում է AB հատվածի երկարությունը: $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի երկարությունը նշանակվում է $|\overrightarrow{AB}|$, նմանապես $\vec{a}$ վեկտորի երկարությունը՝ $|\vec{a}|$: Զրոյական վեկտորի երկարությունը համարվում է հավասար 0-ի. $|\vec{0}| = 0$:

15(ա) և 15(բ) նկարներում պատկերված վեկտորների երկարությունները հետևյալներն են. $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{CD}| = 5$, $|\overrightarrow{EF}| = 2{,}5$, $|\overrightarrow{MM}| = 0$, $|\vec{a}| = \sqrt{13}$, $|\vec{b}| = 4{,}5$, $|\vec{c}| = 3$ (նկարում վանդակներից յուրաքանչյուրի կողմը հավասար է հատվածների չափման միավորին):



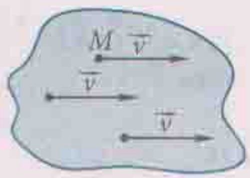
ա)



բ)
Նկ. 15

8. Վեկտորների հավասարությունը

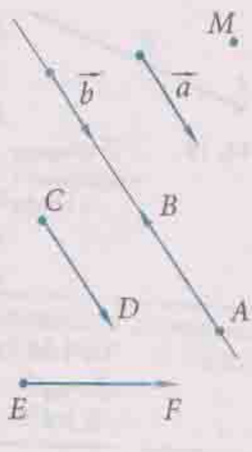
Հավասար վեկտորների սահմանումը տալուց առաջ պարզաբանենք մի օրինակ: Դիտարկենք մարմնի շարժումը, որի ընթացքում նրա բոլոր կետերը շարժվում են հենց նույն արագությամբ և միևնույն ուղղությամբ: Մարմնի յուրաքանչյուր M կետի արագությունը վեկտորական մեծություն է և, ուրեմն, այն կարելի է պատկերել այնպիսի ուղղորդված հատվածով, որի սկիզբը համընկնում է M կետին *(նկ. 16)*: Քանի որ մարմնի բոլոր կետերը շարժվում են միևնույն արագությամբ, ապա այդ բոլոր կետերի արագությունները պատկերող ուղղորդված հատվածներն ունեն միևնույն ուղղությունը, և նրանց երկարությունները հավասար են:



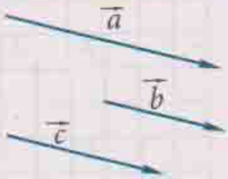
Նկ. 16

Այս օրինակը մեզ հուշում է, թե ինչպես սահմանել վեկտորների հավասարությունը: Սակայն նախապես ներմուծենք *«համագիծ վեկտորներ»* հասկացությունը:

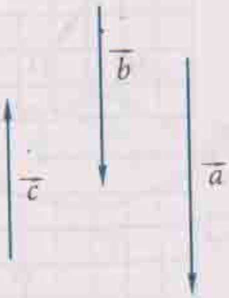
Ոչ զրոյական վեկտորները կոչվում են համագիծ, եթե նրանք գտնվում են կամ նույն ուղղի, կամ զուգահեռ ուղիղների վրա: Զրոյական վեկտորը համարվում է ցանկացած վեկտորին համագիծ:



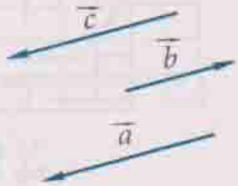
Նկար 17-ում $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MM}$ ($\overrightarrow{MM}$-ը զրոյական է)



ա) Եթե $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{c}$, ապա $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$



բ) Եթե $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{c}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$, ապա $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$



Եթե $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$, ապա $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$

գ)
Նկ. 18

վեկտորները համագիծ են, իսկ $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{EF}$, ինչպես նաև $\overrightarrow{CD}$ և $\overrightarrow{EF}$ վեկտորները համագիծ չեն (ոչ համագիծ վեկտորներին կանվանենք նաև *չհամագիծ* վեկտորներ):

Եթե երկու՝ ոչ զրոյական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա նրանք կարող են ուղղված լինել կա՛մ միանման, կա՛մ հակադիր: Առաջին դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կոչվում են *համուղղված*, իսկ երկրորդ դեպքում՝ *հակուղղված**:

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, ապա գրվում են այսպես՝ $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, իսկ եթե հակուղղված են, այսպես՝ $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$: Նկար 17–ում $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$:

Ինչպես ասել ենք, զրոյական վեկտորի սկիզբը համընկնում է նրա վերջին, և, ուրեմն, զրոյական վեկտորը որևէ որոշակի ուղղություն չունի: Այլ խոսքով՝ ցանկացած ուղղություն կարելի է համարել զրոյական վեկտորի ուղղություն: Պայմանավորվենք՝ զրոյական վեկտորը համարել ցանկացած վեկտորին *համուղղված*:

Այսպիսով՝ նկար 17–ում $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\vec{a}$ և այլն:

Ոչ զրոյական համագիծ վեկտորներն օժտված են որոշակի հատկություններով, որոնք պարզաբանված են 18–ի (ա, բ, գ) նկարներում:

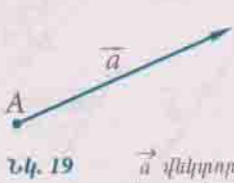
Այժմ սահմանենք «*հավասար վեկտորներ*» հասկացությունը:

Սահմանում: *Վեկտորները կոչվում են հավասար, եթե նրանք համուղղված են, և նրանց երկարությունները հավասար են:*

Այսպիսով՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները հավասար են, եթե $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ և $|\vec{a}|=|\vec{b}|$:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների հավասարությունը նշանակվում է. $\vec{a}=\vec{b}$:

9. Վեկտորների տեղադրումը տրված կետից



Նկ. 19 $\vec{a}$ վեկտորը տեղադրված է A կետից

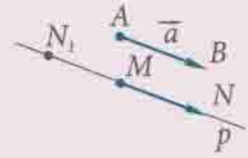
Եթե A կետը $\vec{a}$ վեկտորի սկիզբն է, ապա ասում են, որ $\vec{a}$ վեկտորը տեղադրված է A կետից *(նկ. 19)*: Ապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Ցանկացած M կետից կարելի է տեղադրել տրված $\vec{a}$ վեկտորին հավասար վեկտոր, ընդ որում՝ միայն մեկը:

Իսկապես, եթե $\vec{a}$ –ն զրոյական վեկտոր է, ապա հենց $\overrightarrow{MM}$ վեկտորը կլինի որոնելի վեկտորը: Ենթադրենք, որ $\vec{a}$ –ն ոչ զրոյական վեկտոր է, իսկ A–ն և B–ն նրա սկիզբն ու վերջն են:

* Անշուշտ, դժվար չէ նաև ճշգրիտ սահմանել այս հասկացությունները: Օրինակ՝ զուգահեռ ուղիղների վրա գտնվող երկու ոչ զրոյական վեկտորները կոչվում են համուղղված (հակուղղված), եթե նրանց վերջնակետերը գտնվում են այն ուղղի միևնույն կողմում (տարբեր կողմերում), որն անցնում է դրանց սկզբնակետերով: Մտածեք, թե ինչպես տալ նմանատիպ սահմանում երկու այն վեկտորների համար, որոնք գտնվում են մի ուղղի վրա:

M կետով տանենք p ուղիղը, որը զուգահեռ է AB–ին *(նկ. 20)*: Նշենք, որ եթե M–ը AB ուղղի կետ է, ապա որպես p ուղիղ վերցնում ենք հենց AB ուղիղը: p ուղղի վրա տեղադրենք AB հատվածին հավասար MN և MN_1 հատվածները: $\overrightarrow{MN}$ և $\overrightarrow{MN_1}$ վեկտորներից ընտրենք այն, որը համուղղված է $\vec{a}$ վեկտորին ($\overrightarrow{MN}$ վեկտորը՝ նկար 20–ում): Հենց այդ վեկտորն էլ կլինի որոնելի վեկտորը, որը հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին: Կառուցումից հետևում է, որ այդպիսի վեկտորը միայն մեկն է:



Նկ. 20

$\vec{a}$ վեկտորը տեղադրված է A կետից

Պ ա ր զ ա բ ա ն ու մ : Տարբեր կետերից տեղադրված հավասար վեկտորները հաճախ նշանակվում են միևնույն տառով: Այդպես էին նշանակված, օրինակ, տարբեր կետերի արագությունների՝ միմյանց հավասար վեկտորները նկար 16–ում: Երբեմն այդպիսի վեկտորների համար ասում են, որ դրանք հենց նույն վեկտորն են, թեև տեղադրված են տարբեր կետերից:

Գործնական առաջադրանքներ

45. Նշեք մի ուղղի վրա չգտնվող երեք՝ A, B, C կետեր: Գծեք բոլոր ոչ զրոյական վեկտորները, որոնց սկիզբն ու վերջը համընկնում են այդ կետերից որևէ երկուսին: Գրեք ստացված բոլոր վեկտորները և նշեք յուրաքանչյուրի սկիզբն ու վերջը:

46. Ընտրելով հարմար մասշտաբ՝ գծագրեք այն վեկտորները, որոնք պատկերում են ինքնաթիռի հետևյալ թռիչքը. սկզբում A քաղաքից դեպի հարավ՝ 300 կմ մինչև B քաղաքը, իսկ հետո՝ դեպի արևելք՝ 500 կմ մինչև C քաղաքը: Այնուհետև գծեք $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը, որը պատկերում է ինքնաթիռի տեղափոխությունը թռիչքի սկզբնակետից մինչև վերջնակետ:

47. Գծեք $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ և $\overrightarrow{EF}$ վեկտորներն այնպես, որ՝ ա) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ և $\overrightarrow{EF}$ վեկտորները լինեն համագիծ, և $|\overrightarrow{AB}| = 1$ սմ, $|\overrightarrow{CD}| = 2{,}5$ սմ, $|\overrightarrow{EF}| = 4{,}5$ սմ, բ) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{EF}$ վեկտորները լինեն համագիծ, $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները համագիծ չլինեն, և $|\overrightarrow{AB}| = 3$ սմ, $|\overrightarrow{CD}| = 1{,}5$ սմ, $|\overrightarrow{EF}| = 1$ սմ:

48. Գծեք երկու՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ տարագիծ վեկտորներ: Պատկերեք մի քանի վեկտորներ, որոնք՝ ա) համուղղված են $\vec{a}$ վեկտորին, բ) համուղղված են $\vec{b}$ վեկտորին, գ) հակուղղված են $\vec{a}$ վեկտորին, դ)հակուղղված են $\vec{b}$ վեկտորին:

49. Գծեք երկու վեկտոր, որոնք՝ ա) ունեն հավասար երկարություն և տարագիծ են, բ) ունեն հավասար երկարություն և համուղղված են, գ) ունեն հավասար երկարություն և հակուղղված են: Ո՞ր դեպքում են ստացվում հավասար վեկտորներ:

50. Գծեք ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորը և նշեք հարթության երեք՝ A, B, C կետերը: A, B, C կետերից տեղադրեք $\vec{a}$-ին հավասար վեկտորներ:

Հարցեր և խնդիրներ

51. Հետևյալ մեծություններից որո՞նք են վեկտորական. արագություն, զանգված, ուժ, ժամանակ, ջերմաստիճան, երկարություն, մակերես, աշխատանք:

52 $ABCD$ ուղղանկյան մեջ $AB = 3$ սմ, $BC = 4$ սմ, իսկ M-ը AB կողմի միջնակետն է: Գտեք $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{DC}$, $\vec{MC}$, $\vec{MA}$, $\vec{CB}$, $\vec{AC}$ վեկտորների երկարությունները:

53. A ուղիղ անկյունով $ABCD$ ուղղանկյուն սեղանի AD հիմքը 12 սմ է, $AB = 5$ սմ, $\angle D = 45°$: Գտեք $\vec{BD}$, $\vec{CD}$ և $\vec{AC}$ վեկտորների երկարությունները:

54. Գրեք այն համագիծ վեկտորների զույգերը, որոնք որոշվում են՝ ա) $MNPQ$ զուգահեռագծի կողմերով, բ) AD և BC հիմքերով $ABCD$ սեղանի կողմերով, գ) FGH եռանկյան կողմերով: Դրանցից առանձնացրեք համուղղված և հակուղղված վեկտորների զույգերը:

55. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում: Արդյոք հավասա՞ր են հետևյալ վեկտորները. ա) $\vec{AB}$ և $\vec{DC}$, բ) $\vec{BC}$ և $\vec{DA}$, գ) $\vec{AO}$ և $\vec{OC}$, դ) $\vec{AC}$ և $\vec{BD}$: Պատասխանը հիմնավորեք:

56. $MNKL$ հավասարասրուն սեղանի MN և LK սրունքների միջնակետերը S և T կետերն են: Արդյոք հավասա՞ր են հետևյալ վեկտորները. ա) $\vec{NL}$ և $\vec{KL}$, բ) $\vec{MS}$ և $\vec{SN}$, գ) $\vec{MN}$ և $\vec{KL}$, դ) $\vec{TS}$ և $\vec{KM}$, ե) $\vec{TL}$ և $\vec{KT}$:

57. Ապացուցեք, որ եթե $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$ վեկտորները հավասար են, ապա AD և BC հատվածների միջնակետերը համընկնում են: Ապացուցեք հակադարձ պնդումը. եթե AD և BC հատվածների միջնակետերը համընկնում են, ապա $\vec{AB} = \vec{CD}$:

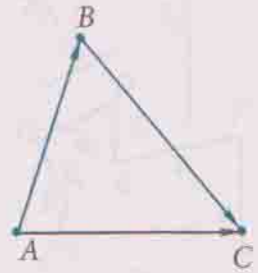
58. Որոշեք $ABCD$ քառանկյան տեսակը, եթե՝ ա) $\vec{AB} = \vec{DC}$ և $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$, բ) $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{DC}$, իսկ $\vec{AD}$ և $\vec{BC}$ վեկտորները համագիծ չեն:

59. Արդյոք ճշմարի՞տ է հետևյալ պնդումը. ա) եթե $\vec{a} = \vec{b}$, ապա $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, բ) եթե $\vec{a} = \vec{b}$, ապա $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, գ) եթե $\vec{a} = \vec{b}$, ապա $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, դ) եթե $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, ապա $\vec{a} = \vec{b}$, ե) եթե $\vec{a} = \vec{0}$, ապա $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$:

§4 ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ ԵՎ ՀԱՆՈՒՄԸ

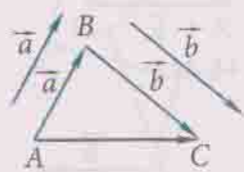
10. Երկու վեկտորների գումարը

Դիտարկենք մի օրինակ: Դիցուք՝ նյութական կետը տեղափոխվել է նախ՝ A կետից B կետը, իսկ հետո՝ B կետից C կետը *(նկ. 21)*: Այդ երկու տեղափոխությունը կարելի է ներկայացնել $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորներով, որոնց արդյունքում էլ նյութական կետը A կետից տեղափոխվել է C կետը: Ուրեմն՝ վերջնական տեղափոխությունը կարելի է ներկայացնել $\overrightarrow{AC}$ վեկտորով: Քանի որ A կետից C կետ տեղափոխությունը ստացվում է՝ A–ից B տեղափոխությանն ավելացնելով B–ից C տեղափոխությունը, ապա բնական կլինի $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը համարել որպես $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորների գումար. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$:



Նկ. 21

Նկարագրված օրինակը մեզ հանգեցնում է երկու վեկտորների գումարի հասկացությանը: Դիցուք՝ *երկու վեկտորները $\vec{a}$–ն և $\vec{b}$–ն են: Վերցնենք կամայական A կետ և այդ կետից տեղադրենք $\vec{a}$ վեկտորին հավասար $\overrightarrow{AB}$ վեկտորը (նկ. 22): Այնուհետև B կետից տեղադրենք $\vec{b}$ վեկտորին հավասար $\overrightarrow{BC}$ վեկտորը: $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը կոչվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումար:*

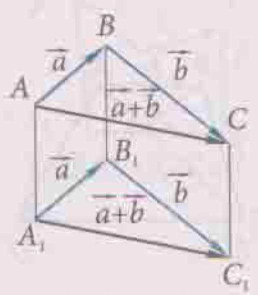


Նկ. 22

Վեկտորների գումարման այս կանոնը կոչվում է *եռանկյան կանոն*: Նկար 22–ի միջոցով պարզաբանվում է այդ անվանումը:

Ապացուցենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները գումարելիս, եթե A կետը, որից տեղադրվում է $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ վեկտորը, փոխարինենք մեկ այլ՝ A_1 կետով, ապա $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը փոխարինվում է իրեն հավասար $\overrightarrow{A_1C_1}$ վեկտորով: Այլ խոսքով՝ ապացուցենք, որ եթե $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ և $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, ապա $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ *(նկ. 23)*:

Ընդունենք, որ A, B, A_1 կետերը, B, C, B_1 կետերը և A, C, A_1 կետերը չեն գտնվում մի ուղղի վրա (մյուս դեպքերի համար պնդումն ապացուցեք ինքնուրույն): $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ հավասարությունից հետևում է, որ ABB_1A_1 քառանկյան AB և A_1B_1 կողմերը հավասար են և զուգահեռ են, ուրեմն՝ այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է: Հետևաբար՝ $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$: Նմանապես՝ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ հավասարությունից հետևում է, որ BCC_1B_1 քառանկյունը ևս զուգահեռագիծ է, ուրեմն՝ $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$: Ստացված հավասարությունների հիման վրա եզրակացնում ենք, որ $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$: Ուստի AA_1C_1C–ն զուգահեռագիծ է, ուրեմն՝ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} = \vec{a} + \vec{b}$

Նկ. 23

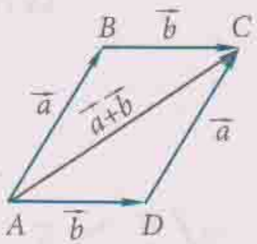
$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումարը նշանակվում է $\vec{a} + \vec{b}$:

Եթե ըստ եռանկյան կանոնի կազմենք ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի և զրոյական վեկտորի գումարը, ապա հանգում ենք այսպիսի եզրակացության. *ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի համար տեղի ունի $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ հավասարությունը:*

Եռանկյան կանոնը կարելի է ձևակերպել նաև այսպես. եթե A–ն, B–ն, C–ն կամայական կետեր են, ապա $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$: Մեկ անգամ ևս ընդգծենք, որ այս հավասարությունը տեղի ունի ցանկացած A, B, C կետերի համար, մասնավորապես նաև այն դեպքում, երբ այդ կետերից երկուսը կամ նույնիսկ բոլոր երեքը համընկնում են:

11. Վեկտորների գումարման օրենքները: Զուգահեռագծի կանոնը

Թեորեմ: ***Ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.***



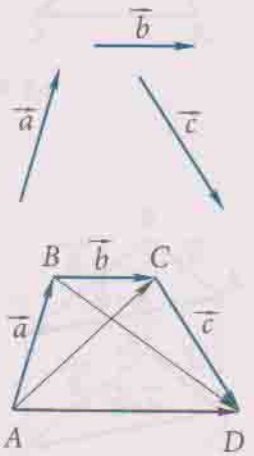
Նկ. 24

1^0. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *(տեղափոխական օրենք)*:

2^0. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ *(զուգորդական օրենք)*:

Ապացուցում: 1^0. Քննության առնենք այն դեպքը, երբ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն (դրանց համագիծ լինելու դեպքը դիտարկեք ինքնուրույն): Կամայական A կետից տեղադրենք $\vec{AB} = \vec{a}$ և $\vec{AD} = \vec{b}$ վեկտորները և այդ վեկտորների վրա կառուցենք $ABCD$ զուգահեռագիծը, ինչպես պատկերված է նկար 24–ում:

Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$: Նույն կերպ ստացվում է՝ $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{b} + \vec{a}$: Դրանցից հետևում է, որ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$:



Նկ. 25

2^0. Կամայական A կետից տեղադրենք $\vec{AB} = \vec{a}$ վեկտորը, B կետից՝ $\vec{BC} = \vec{b}$ վեկտորը, իսկ C կետից՝ $\vec{CD} = \vec{c}$ վեկտորը *(նկ. 25)*: Կիրառելով եռանկյան կանոնը՝ ստանում ենք.

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$,

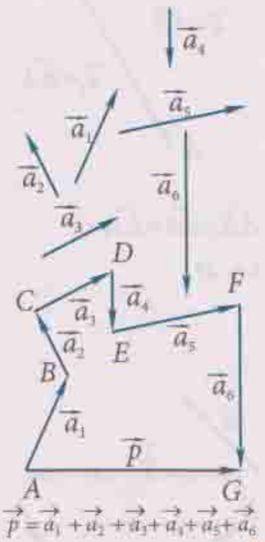
$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$:

Ստացված հավասարություններից հետևում է, որ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$: *Թեորեմն ապացուցված է:*

1^0 հատկության ապացուցման ընթացքում մենք հիմնավորեցինք տարագիծ վեկտորների գումարման, այսպես կոչված, *զուգահեռագծի կանոնը:* Ըստ այդ կանոնի՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ տարագիծ վեկտորները գումարելու համար հարկավոր է ինչ–որ A կետից տեղադրել $\vec{AB} = \vec{a}$ և $\vec{AD} = \vec{b}$ վեկտորները և կառուցել $ABCD$ զուգահեռագիծը *(տես նկ. 24)*. այդ դեպքում $\vec{AC}$ վեկտորը հավասար է $\vec{a} + \vec{b}$: Զուգահեռագծի կանոնը հաճախակի է կիրառվում ֆիզիկայում, օրինակ՝ երկու ուժերի գումարը որոշելիս:

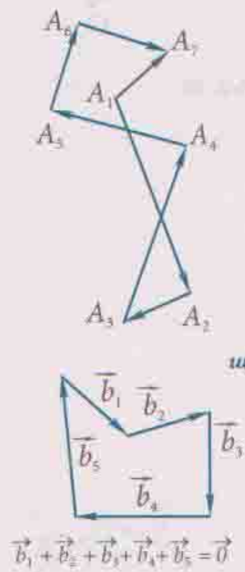
12. Մի քանի վեկտորների գումարը

Մի քանի վեկտորների գումարումը կատարվում է հետևյալ կերպ. առաջին վեկտորը գումարվում է երկրորդին, այնուհետև նրանց գումարը գումարվում է երրորդ վեկտորին և այլն: Վեկտորների գումարման օրենքներից հետևում է, որ մի քանի վեկտորների գումարը կախված չէ այն բանից, թե ինչ հերթականությամբ են դրանք գումարվում: Նկար 25-ում ցուցադրված է $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների գումարի կառուցումը: Կամայական A կետից տեղադրված է $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ վեկտորը, այնուհետև B կետից տեղադրված է $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ վեկտորը, և, վերջապես, C կետից տեղադրված է $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ վեկտորը: Արդյունքում ստացվում է $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ վեկտորը: Համանման ձևով կարելի է կառուցել չորս, հինգ և ընդհանրապես ցանկացած թվով վեկտորների գումարը: Նկար 26-ում ցուցադրված է վեց վեկտորների գումարի կառուցումը: Մի քանի վեկտորների գումարի կառուցման այդ կանոնը կոչվում է *բազմանկյան կանոն*: Նկար 26-ի միջոցով պարզաբանվում է այդ անվանումը:



Նկ. 26

Բազմանկյան կանոնը կարելի է ձևակերպել նաև հետևյալ կերպ. եթե $A_1, A_2, \ldots A_n$-ը հարթության կամայական կետեր են, ապա $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$ *(նկար 27(ա)-ում $n = 7$)*: Այս հավասարությունը տեղի ունի ցանկացած $A_1, A_2, \ldots, A_n$ կետերի համար, մասնավորապես նաև այն դեպքում, եթե նրանցից մի քանիսը համընկնում են: Օրինակ՝ եթե առաջին վեկտորի սկզբնակետը համընկնում է վերջին վեկտորի վերջնակետին, ապա այդ վեկտորների գումարը հավասար է զրոյական վեկտորի *(նկ. 27(բ))*:



Նկ. 27

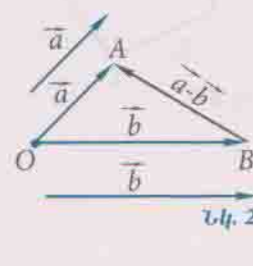
13. Վեկտորների հանումը

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերություն կոչվում է այն վեկտորը, որի և $\vec{b}$ վեկտորի գումարը հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին:

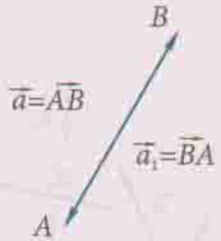
$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը նշանակվում է $\vec{a} - \vec{b}$: Դիտարկենք խնդիր՝ երկու վեկտորների տարբերությունը կառուցելու մասին:

Խնդիր: *Տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: Կառուցել $\vec{a} - \vec{b}$ վեկտորը:*

Լուծում: Հարթության վրա նշենք կամայական O կետ և նրանից տեղադրենք $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ վեկտորները *(նկ. 28)*: Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$, կամ $\vec{b} + \overrightarrow{BA} = \vec{a}$: Այդպիսով՝ $\overrightarrow{BA}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումարը հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին: Ըստ վեկտորների տարբերության սահմանման՝ դա նշանակում է, որ $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, այսինքն՝ $\overrightarrow{BA}$ վեկտորը որոնելին է:

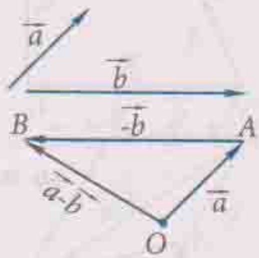

Նկ. 28

Երկու վեկտորների տարբերությունը կառուցելու խնդիրը



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Նկ. 29



Նկ. 30

կարելի է լուծել նաև ուրիշ եղանակով: Մինչ կնկարագրենք այդ եղանակը, ներմուծենք *հակադիր վեկտորի* հասկացությունը:

Դիցուք՝ $\vec{a}$–ն կամայական ոչ զրոյական վեկտոր է: $\vec{a}_1$ վեկտորը կոչվում է $\vec{a}$ վեկտորին հակադիր, եթե $\vec{a}_1$ և $\vec{a}$ վեկտորներն ունեն հավասար երկարություն և հակուղղված են: Նկար 29–ում $\vec{a}_1 = \overrightarrow{BA}$ վեկտորը հակադիր է $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ վեկտորին: Զրոյական վեկտորին հակադիր է համարվում զրոյական վեկտորը:

$\vec{a}$ վեկտորի հակադիր վեկտորը նշանակվում է $-\vec{a}$: Ակնհայտ է, որ $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$:

Ապացուցենք թեորեմ վեկտորների տարբերության մասին:

Թեորեմ: ***Ցանկացած $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համար տեղի ունի $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ հավասարությունը:***

Ապացույց: Ըստ վեկտորների տարբերության սահմանման՝ $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}$: Այս հավասարության երկու մասին $-\vec{b}$ ավելացնելով՝ ստանում ենք.

$(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{a}+(-\vec{b})$,

կամ՝ $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{0}=\vec{a}+(-\vec{b})$,

որտեղից՝ $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$: *Թեորեմն ապացուցված է:*

Այժմ բերենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը կառուցելու խնդրի մեկ այլ լուծում: Հարթության վրա նշենք կամայական O կետ և այդ կետից տեղադրենք $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ վեկտորը *(նկ. 30)*: Այնուհետև A կետից տեղադրենք $\overrightarrow{AB}=-\vec{b}$ վեկտորը: Ըստ վեկտորների տարբերության մասին թեորեմի՝ $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$: Ուրեմն՝ $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$:

Այսինքն՝ $\overrightarrow{OB}$ վեկտորը որոնելին է:

Գործնական առաջադրանքներ

60. Զբոսաշրջիկը A քաղաքից գնաց 20 կմ դեպի արևելք՝ մինչև B քաղաքը, իսկ հետո՝ 30 կմ դեպի արևմուտք՝ մինչև C քաղաքը: Ընտրելով մի հարմար մասշտաբ՝ գծեք $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորները: Հավասա՞ր են, արդյոք, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորները:

61. Գծեք զույգ առ զույգ տարագիծ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ վեկտորներ և կառուցեք $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}+\vec{z}$, $\vec{z}+\vec{y}$ վեկտորները:

62. Գծեք զույգ առ զույգ տարագիծ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ վեկտորներ և օգտվելով բազմանկյան կանոնից՝ կառուցեք $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$ վեկտորը:

63. Գծեք զույգ առ զույգ տարագիծ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ վեկտորներ և կառուցեք $\vec{x}-\vec{y}$, $\vec{z}-\vec{y}$, $\vec{x}-\vec{z}$, $-\vec{x}$, $-\vec{y}$, $-\vec{z}$ վեկտորները:

64. Գծեք $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ վեկտորներն այնպես, որ $\vec{x}\uparrow\uparrow\vec{y}$, $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{z}$: Կառուցեք $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{y}-\vec{z}$, $\vec{x}+\vec{z}$ վեկտորները:

65. Գծեք երկու՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ոչ զրոյական համագիծ վեկտորներ այնպես, որ $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$: Կառուցեք հետևյալ վեկտորները. ա) $\vec{a}-\vec{b}$, բ) $\vec{b}-\vec{a}$, գ) $-\vec{a}+\vec{b}$: Կառուցումը կատարեք նաև այն դեպքի համար, երբ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$:

Հարցեր և խնդիրներ

66. Տրված է կամայական քառանկյուն՝ $MNPQ$-ն: Ապացուցեք, որ՝ ա) $\vec{MN}+\vec{NQ}=\vec{MP}+\vec{PQ}$, բ) $\vec{MN}+\vec{NP}=\vec{MQ}+\vec{QP}$:

67. Ապացուցեք, որ ցանկացած երկու՝ $\vec{x}$ և $\vec{y}$ տարագիծ վեկտորների համար տեղի ունի $|\vec{x}+\vec{y}|<|\vec{x}|+|\vec{y}|$ անհավասարությունը:

68. Ապացուցեք, որ եթե A-ն, B-ն, C-ն և D-ն կամայական կետեր են, ապա $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}=\vec{0}$:

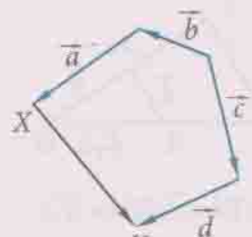
69. ABC հավասարակողմ եռանկյան կողմը a է: Գտեք՝ ա) $|\vec{AB}+\vec{BC}|$, բ) $|\vec{AB}+\vec{AC}|$, գ) $|\vec{AB}+\vec{CB}|$, դ) $|\vec{BA}-\vec{BC}|$, ե) $|\vec{AB}-\vec{AC}|$:

70. ABC եռանկյան մեջ $AB=6$, $BC=8$, $\angle B=90^\circ$: Գտեք՝ ա) $|\vec{BA}|-|\vec{BC}|$ և $|\vec{BA}-\vec{BC}|$, բ) $|\vec{AB}|+|\vec{BC}|$ և $|\vec{AB}+\vec{BC}|$, գ) $|\vec{BA}|+|\vec{BC}|$ և $|\vec{BA}+\vec{BC}|$, դ) $|\vec{AB}|-|\vec{BC}|$ և $|\vec{AB}-\vec{BC}|$:

71. Օգտվելով բազմանկյան կանոնից՝ պարզեցրեք արտահայտությունը. ա) $(\vec{AB}+\vec{BC}-\vec{MC})+(\vec{MD}-\vec{KD})$, բ) $(\vec{CB}+\vec{AC}+\vec{BD})-(\vec{MK}+\vec{KD})$:

72. Դիցուք՝ X-ը, Y-ը և Z-ը կամայական կետեր են: Ապացուցեք, որ $\vec{p}=\vec{XY}+\vec{ZX}+\vec{YZ}$, $\vec{q}=(\vec{XY}-\vec{XZ})+\vec{YZ}$ և $\vec{r}=(\vec{ZY}-\vec{XY})-\vec{ZX}$, վեկտորները զրոյական են:

73. Նկար 31-ում պատկերված են $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{XY}$ վեկտորները: $\vec{XY}$ վեկտորը ներկայացրեք մյուս վեկտորների կամ դրանց հակադիրների գումարի տեսքով:



Նկ. 31

74. Տրված է ABC եռանկյունը: $\vec{a}=\vec{AB}$ և $\vec{b}=\vec{AC}$ վեկտորների միջոցով արտահայտեք հետևյալ վեկտորները՝ ա) $\vec{BA}$, բ) $\vec{CB}$, գ) $\vec{CB}+\vec{BA}$:

Լուծում: ա) $\vec{BA}$ և $\vec{AB}$ վեկտորները հակադիր են, ուստի $\vec{BA}=-\vec{AB}$, կամ $\vec{BA}=-\vec{a}$: բ) Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\vec{CB}=\vec{CA}+\vec{AB}$: Բայց $\vec{CA}=-\vec{AC}$, ուստի՝ $\vec{CB}=\vec{AB}+(-\vec{AC})=\vec{AB}-\vec{AC}=\vec{a}-\vec{b}$: գ) $\vec{CB}+\vec{BA}=\vec{CA}=-\vec{AC}=-\vec{b}$:

75. ABC եռանկյան AB և AC կողմերի միջնակետերն են M-ը և N-ը: $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ և $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$ վեկտորների միջոցով:

76. BB_1 հատվածը ABC եռանկյան միջնագիծն է: $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{x}=\overrightarrow{AB_1}$ և $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$ վեկտորների միջոցով:

77. Տրված է $ABCD$ զուգահեռագիծը: $\overrightarrow{AC}$ վեկտորն արտահայտեք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով, եթե՝ ա) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, բ) $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$, գ) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DA}$:

78. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում: $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ և $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ վեկտորների միջոցով արտահայտեք հետևյալ վեկտորները. $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$:

79. Տրված է $ABCD$ զուգահեռագիծը: Ապացուցեք, որ $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=$ $=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$, որտեղ X-ը հարթության կամայական կետ է:

80. Ապացուցեք, որ ցանկացած երկու՝ $\vec{x}$ և $\vec{y}$ վեկտորների համար տեղի ունի $|\vec{x}-\vec{y}| \le |\vec{x}|+|\vec{y}|$ անհավասարությունը: Ո՞ր դեպքում է $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$:

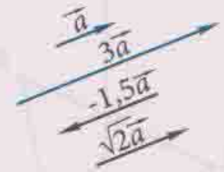
81. Պարաշյուտիստը վայրէջք էր կատարում 3 մ/վ արագությամբ: Սրընթաց քամին սկսում է նրան կողքի քշել $3\sqrt{3}$ մ/վ արագությամբ: Ուղղաձիգի նկատմամբ ի՞նչ անկյան տակ է վայրէջք կատարում պարաշյուտիստը:

§5 ՎԵԿՏՈՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ ԹՎՈՎ: ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

14. Վեկտորի և թվի արտադրյալը

Ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալ կոչվում է այն $\vec{b}$ վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է $|k|\cdot|\vec{a}|$, ընդ որում՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, եթե $k \geq 0$, և հակուղղված են, եթե $k < 0$: Զրոյական վեկտորի և կամայական թվի արտադրյալը համարվում է զրոյական վեկտոր:

$\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալը նշանակվում է $k\vec{a}$: Նկար 32–ում պատկերված են $\vec{a}$ վեկտորը և $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $\sqrt{2}\vec{a}$ վեկտորները:



Նկ. 32

Նկ. 33

Վեկտորի և թվի արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ՝ *1) ցանկացած վեկտորի և զրո թվի արտադրյալը զրոյական վեկտոր է, 2) ցանկացած k թվի և ցանկացած վեկտորի համար $\vec{a}$ և $k\vec{a}$ վեկտորները համագիծ են:*

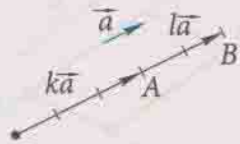
Վեկտորի և թվի արտադրյալը օժտված է մի քանի հիմնական հատկություններով:

Ցանկացած k, l թվերի և ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

1^0. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (զուգորդական օրենք),

2^0. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (առաջին բաշխական օրենք),

3^0. $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (երկրորդ բաշխական օրենք):



$\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}=l\vec{a}$

$\overrightarrow{OB}=(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

Նկ. 34

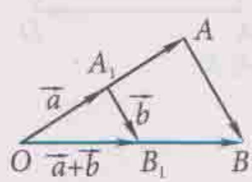
Նկար 33–ում օրինակով պարզաբանված է զուգորդական օրենքը: Այդ նկարում ներկայացված է $k = 2$, $l = 3$ դեպքը:

Նկար 34–ում օրինակով պարզաբանված է առաջին բաշխական օրենքը: Այդ նկարում ներկայացված է $k = 3$, $l = 2$ դեպքը:

Նկար 35–ում օրինակով պարզաբանված է երկրորդ բաշխական օրենքը: Այդ նկարում OAB և OA_1B_1 եռանկյունների համապատասխան կողմերը համեմատական են. $\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = k\vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = k(\vec{a}+\vec{b})$:

Մյուս կողմից՝ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{a} + k\vec{b}$:

Այսպիսով՝ $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$:



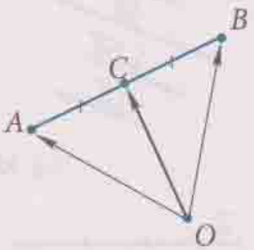
$\overrightarrow{OB} = k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a}+k\vec{b}$

Նկ. 35

Պ ա ր զ ա բ ա ն ու մ: Մեր դիտարկած՝ վեկտորների հետ կատարվող գործողությունների հատկությունները թույլ են տալիս որոշ ընդհանրություններ տեսնել այդ և հանրահաշվական գործողությունների հատկությունների միջև: Նկատենք, որ վեկտորների գումար, տարբերություն և վեկտորի ու թվի արտադրյալ պարունակող արտահայտությունները կարող ենք ձևափոխել ըստ այն կանոնների, որոնք կիրառվում են հանրահաշվական արտահայտություններում: Օրինակ՝ $\vec{p} = 2(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) - 3(\vec{b} - \vec{c} + \vec{a})$ արտահայտությունը կարելի է ձևափոխել այսպես.

$$\vec{p} = 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c} - 3\vec{a} = -5\vec{b} + 4\vec{c}$$

15. Վեկտորների կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս



Նկ. 36

Երկրաչափական խնդիրներ լուծելու և թեորեմներ ապացուցելու համար հաճախ հարմար է օգտվել վեկտորներից: Բերենք այդպիսի օրինակներ՝ նախապես լուծելով մի օժանդակ խնդիր:

Խնդիր 1: *C կետը AB հատվածի միջնակետն է, իսկ O կետը՝ հարթության կամայական կետ (նկ. 36): Ապացուցել, որ*

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right):$$

Լուծում: Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$: Գումարելով այս հավասարությունները՝ ստանում ենք.

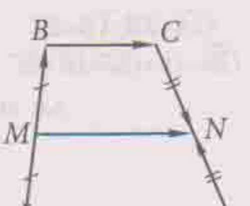
$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$:

Քանի որ C կետը AB հատվածի միջնակետն է, ապա $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$:

Այսպիսով՝ $2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, կամ $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$:

Խնդիր 2: Սեղանի միջին գծի հատկությունը

Ապացուցել, որ սեղանի միջին գիծը զուգահեռ է նրա հիմքերին և հավասար է դրանց կիսագումարին:



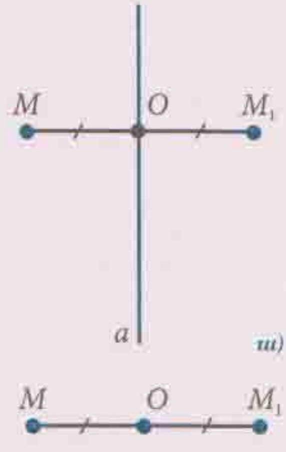
Նկ. 37

Ապացուցում: Դիցուք՝ $ABCD$ սեղանի AB և CD սրունքների միջնակետերն են M-ը և N-ը *(նկ. 37)*: Ապացուցենք, որ $MN \| AD$ և $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$:

Ըստ բազմանկյան կանոնի՝ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ և $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$: Գումարելով այս հավասարությունները՝ ստանում ենք՝ $2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN})$: Քանի որ M-ը և N-ը AB և CD հատվածների միջնակետերն են, ապա $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ և $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$: Հետևաբար՝ $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, որտեղից՝ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$: Քանի որ $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորները համուղղված են, ապա $\overrightarrow{MN}$ և $\overrightarrow{AD}$ վեկտորները ևս համուղղված են, իսկ $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ վեկտորի երկարությունը հավասար է $AD + BC$: Դրանից հետևում է, որ $MN \| AD$ և $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

16. Գաղափար զուգահեռ տեղափոխման մասին

Պատկերացնենք, որ հարթության յուրաքանչյուր կետի համադրվում է այդ նույն հարթության որևէ կետ, ընդ որում՝ հարթության ամեն մի կետը համադրվում է մի որևէ կետի հետ: Այդ դեպքում ասում են, որ տրված է ***հարթության արտապատկերումն իր վրա:***

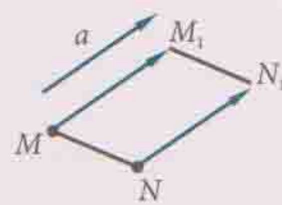


Նկ. 38

Երկրաչափության դասընթացում մենք, փաստորեն, հարթության արտապատկերման արդեն հանդիպել ենք: Հիշենք, որ առանցքային և կենտրոնային համաչափությունները այդպիսի արտապատկերում են *(նկ. 38)*: Դիտենք, օրինակ, կենտրոնային համաչափությունը: Դիցուք՝ O-ն համաչափության կենտրոնն է: Հարթության յուրաքանչյուր M կետի համադրվում է O կենտրոնի նկատմամբ իրեն համաչափ M_1 կետը, և ամեն մի M_1 կետը համադրվում է մի որևէ M կետի հետ *(նկ. 38(բ))*: Այսպիսով՝ կենտրոնային համաչափությունը հարթության արտապատկերումն է իր վրա:

Այժմ դիտարկենք հարթության՝ ինքն իր վրա արտապատկերման մեկ այլ օրինակ:

Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն տրված վեկտոր է: Հարթության արտապատկերումն իր վրա կոչվում է ***զուգահեռ տեղափոխում $\vec{a}$ վեկտորով,*** եթե այդ դեպքում յուրաքանչյուր M կետ արտապատկերվում է մի այնպիսի M_1 կետի, որ $\overrightarrow{MM_1}$ վեկտորը հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին *(նկ. 39)*:



Նկ. 39

Նկատենք, որ զուգահեռ տեղափոխումը հարթության այնպիսի արտապատկերումն է իր վրա, որը պահպանում է հեռավորությունները: Պարզաբանենք դրա իմաստը: Դիցուք՝ $\vec{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխման դեպքում M և N կետերն արտապատկերվում են M_1 և N_1 կետերի վրա *(տե՛ս նկ. 39)*: Քանի որ $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$ և $\overrightarrow{NN_1} = \vec{a}$, ապա $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1}$: Դրանից հետևում է, որ $MM_1 \parallel NN_1$ և $MM_1 = NN_1$, ուրեմն՝ MM_1N_1N քառանկյունը զուգահեռագիծ է: Հետևաբար՝ $MN = M_1N_1$, այսինքն՝ M և N կետերի հեռավորությունը հավասար է M_1 և N_1 կետերի հեռավորությանը (այն դեպքը, երբ M և N կետերը դասավորված են $\vec{a}$ վեկտորին զուգահեռ ուղղի վրա, դիտարկեք ինքնուրույն): Այսպիսով՝ զուգահեռ տեղափոխման դեպքում, իրոք, կետերի միջև հեռավորությունը պահպանվում է: Հարթության ինքն իր վրա այդպիսի արտապատկերումը, երբ կետերի միջև հեռավորությունները պահպանվում են, ընդունված է անվանել *շարժում*: Նկարագրված շարժումը ակնառու կարելի է պատկերացնել որպես հարթության սահում $\vec{a}$ վեկտորի երկայնքով:

Գործնական առաջադրանքներ

82. Գծեք երկու՝ $\vec{p}$ և $\vec{q}$ տարագիծ վեկտորներ, որոնց սկզբնակետերը չեն համընկնում, և նշեք որևէ O կետ: O կետից տեղադրեք $2\vec{p}$-ին և $\frac{1}{2}\vec{q}$-ին հավասար վեկտորներ:

83. Գծեք երկու՝ $\vec{x}$ և $\vec{y}$ տարագիծ վեկտորներ և կառուցեք հետևյալ վեկտորները. ա) $\vec{x}+2\vec{y}$, բ) $\frac{1}{2}\vec{y}+\vec{x}$, գ) $3\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$, դ) $1\frac{1}{2}\vec{x}-3\vec{y}$, ե) $0\vec{x}+3\vec{y}$, զ) $-2\vec{x}+0\vec{y}$: Այդ նույն՝ ա)-ից զ) առաջադրանքները կատարեք երկու՝ $\vec{x}$ և $\vec{y}$ ոչ զրոյական՝ համագիծ վեկտորների համար:

84. Գծեք երկու՝ $\vec{p}$ և $\vec{q}$ տարագիծ վեկտորներ, որոնց սկզբնակետերը չեն համընկնում: Կառուցեք $\vec{m}=2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{n}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{i}=-2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{s}=\frac{2}{3}\vec{q}-\vec{p}$ վեկտորները:

85. Գծեք զույգ առ զույգ տարագիծ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները: Կառուցեք վեկտորը. ա) $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$, բ) $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$:

86. Գծեք AB հատված և $\overrightarrow{MM_1}$ վեկտորը: Կառուցեք A_1B_1 հատված, որը ստացվում է AB հատվածից $\overrightarrow{MM_1}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխմամբ:

87. Գծեք AMC եռանկյունը, $\overrightarrow{MM_1}$ վեկտորը, որը զուգահեռ չէ եռանկյան ոչ մի կողմին, և $\vec{a}$ վեկտորը, որը զուգահեռ է AC կողմին: Կառուցեք $A_1B_1C_1$ եռանկյունը, որը ստացվում է ABC եռանկյունից զուգահեռ տեղափոխմամբ՝ ա) $\overrightarrow{MM_1}$ վեկտորով, բ) $\vec{a}$ վեկտորով:

88. Տրված է եռանկյուն, սեղան, շրջանագիծ և $\vec{a}$ վեկտորը: Կառուցեք այն պատկերները, որոնք ստացվում են տրված պատկերներից $\vec{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխմամբ:

Հարցեր և խնդիրներ

89. Տրված է $\vec{p}=3\vec{a}$ վեկտորը, որտեղ $\vec{a}\neq\vec{0}$: Որոշեք, թե $\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $6\vec{a}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրը ինչպես է ուղղված $\vec{p}$ վեկտորի նկատմամբ: Այդ վեկտորների երկարություններն արտահայտեք $|\vec{p}|$-ի միջոցով:

90. Ապացուցեք, որ ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները. ա) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, բ) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$:

91. Դիցուք՝ $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$: $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորների միջոցով արտահայտեք. ա) $2\vec{x} - 2\vec{y}$, բ) $2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$, գ) $-\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$ վեկտորները:

92. $ABCD$ զուգահեռագծի AD կողմի միջնակետը E կետն է, իսկ BC կողմի միջնակետը՝ G կետը: $\vec{EC}$ և $\vec{AG}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{DC} = \vec{a}$ և $\vec{CB} = \vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

93. $ABCD$ զուգահեռագծի BC կողմի վրա նշված է M կետն այնպես, որ $BM : MC = 3 : 1$: $\vec{AM}$ և $\vec{MD}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{a} = \vec{AD}$ և $\vec{b} = \vec{AB}$ վեկտորների միջոցով:

94. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում, իսկ AD կողմի վրա M կետն այնպիսին է, որ $AM = \frac{1}{2}MD$: $\vec{x} = \vec{AD}$ և $\vec{y} = \vec{AB}$ վեկտորների միջոցով արտահայտեք հետևյալ վեկտորները. ա) $\vec{AC}$, $\vec{AO}$, $\vec{CO}$, $\vec{DO}$, $\vec{AD} + \vec{BC}$, $\vec{AD} + \vec{CO}$, $\vec{CO} + \vec{OA}$, բ) $\vec{AM}$, $\vec{MC}$, $\vec{BM}$, $\vec{OM}$:

95. $ABCD$ քառանկյան AC և BD անկյունագծերի միջնակետերն են M–ը և N–ը: Ապացուցեք, որ $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{CB})$:

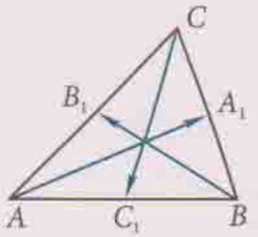
96. AA_1, BB_1 և CC_1 հատվածները ABC եռանկյան միջնագծերն են: $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$, $\vec{CC_1}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{a} = \vec{AC}$ և $\vec{b} = \vec{AB}$ վեկտորների միջոցով:

97. O կետը DEF եռանկյան EG միջնագծի միջնակետն է: $\vec{DO}$ վեկտորն արտահայտեք $\vec{a} = \vec{ED}$ և $\vec{b} = \vec{EF}$ վեկտորների միջոցով:

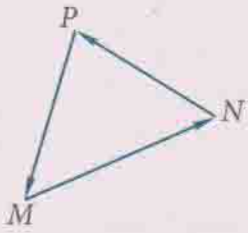
Վեկտորների կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս

98. Տրված է ABC կամայական եռանկյունը: Ապացուցեք, որ գոյություն ունի այնպիսի եռանկյուն, որի կողմերը համապատասխանաբար հավասար են և զուգահեռ ABC եռանկյան միջնագծերին:

Լուծում: Դիցուք՝ ABC եռանկյան միջնագծերն են AA_1–ը, BB_1–ը և CC_1–ը: Այդ դեպքում $\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$,



$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$, $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ *(տե՛ս խնդիր 1-ը կետ 15-ում)*: Գումարելով այս հավասարությունները՝ ստանում ենք $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC})) = \vec{0}$



$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CC_1}$

Նկ. 40

Դրանից հետևում է, որ եթե մենք կառուցենք $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ և $\overrightarrow{CC_1}$ վեկտորների գումարը՝ ըստ բազմանկյան կանոնի, ապա կստանանք խնդրի պահանջներին բավարարող եռանկյուն (դա *MNP* եռանկյունն է նկար 40-ում):

99. *ABC* եռանկյան կողմերի վրա կառուցված են ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1 զուգահեռագծերը: Ապացուցեք, որ գոյություն ունի եռանկյուն, որի կողմերը համապատասխանաբար հավասար են և զուգահեռ A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 հատվածներին:

100. Ապացուցեք, որ սեղանի անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը զուգահեռ է սեղանի հիմքերին և հավասար է դրանց կիսատարբերությանը:

101. Ապացուցեք, որ կամայական քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները հատման կետով կիսվում են:

102. Ապացուցեք եռանկյան միջին գծի մասին թեորեմը:

§6 ՏԱՐԱԳԻԾ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ

17. Վեկտորի վերածումը ըստ երկու տարագիծ վեկտորների

Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն տրված վեկտորներ են: Եթե $\vec{p}$ վեկտորը ներկայացվում է $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ տեսքով, որտեղ x-ը և y-ը որևէ թվեր են, ապա ասում են, որ *$\vec{p}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների. x և y թվերը կոչվում են վերածման գործակիցներ:*

Քննության առնենք այն հարցը, թե հնարավո՞ր է, ըստ տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների, վերածել ցանկացած $\vec{p}$ վեկտորը: Դրա համար նախ ապացուցենք մի լեմմ* համագիծ վեկտորների մասին:

Լեմմ: **Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, և $\vec{a} \neq 0$, ապա գոյություն ունի այնպիսի k թիվ, որ $\vec{b} = k\vec{a}$:**

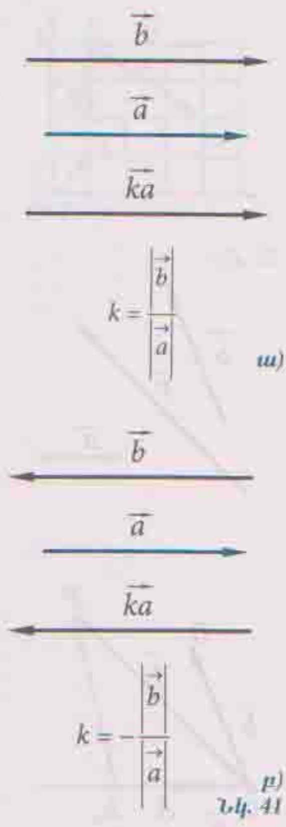
Ապացուցում: Հնարավոր է երկու դեպք. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ և $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$: Քննության առնենք այս դեպքերից յուրաքանչյուրն առանձին:

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$: Դիտարկենք $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ թիվը: Քանի որ $k \geq 0$, ապա $k\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են *(նկ. 41(ա))*: Բացի այդ, դրանց երկարությունները հավասար են. $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$:

Ուրեմն՝ $\vec{b} = k\vec{a}$:

2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$: Դիտարկենք $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ թիվը: Քանի որ $k < 0$, ապա $k\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները դարձյալ հակուղղված են *(նկ. 41(բ))*: Դրանց երկարությունները նույնպես հավասար են. $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$:

Ուրեմն՝ $\vec{b} = k\vec{a}$: *Լեմմը ապացուցված է:*



Նկ. 41

$\vec{OC} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right)$:

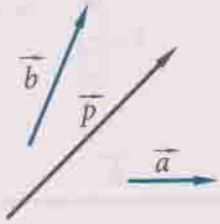
* Լեմմ կոչվում է այն օժանդակ թեորեմը, որի օգնությամբ ապացուցվում է հաջորդ թեորեմը կամ մի քանի այլ թեորեմներ:

Այժմ, օգտվելով այս լեմմից, ապացուցենք թեորեմ՝ վեկտորն ըստ երկու տարագիծ վեկտորների վերածելու մասին:

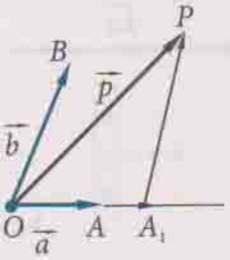
Թեորեմ: ***Ցանկացած վեկտոր կարելի է վերածել ըստ տրված երկու տարագիծ վեկտորների, ընդ որում՝ վերածման գործակիցները որոշվում են միակ կերպով:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն տրված տարագիծ վեկտորներն են: Նախ ապացուցենք, որ ցանկացած $\vec{p}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների: Հնարավոր է երկու դեպք:

1) $\vec{p}$ վեկտորը համագիծ է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներից մեկին, օրինակ՝ $\vec{b}$ վեկտորին: Այս դեպքում, ըստ լեմմի, $\vec{p}$ վեկտորը կարելի է ներկայացնել $\vec{p} = y\vec{b}$ տեսքով, որտեղ y-ը ինչ-որ թիվ է: Հետևաբար՝ $\vec{p} = 0\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b}$, այսինքն՝ $\vec{p}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների:



2) $\vec{p}$ վեկտորը համագիծ չէ ինչպես $\vec{a}$, այնպես էլ $\vec{b}$ վեկտորին: Նշենք որևէ O կետ և այդ կետից տեղադրենք $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ և $\vec{OP} = \vec{p}$, վեկտորները *(նկ. 42)*: P կետով տանենք OB ուղղին զուգահեռ ուղիղ և A_1 տառով նշանակենք այդ ուղղի և OA ուղղի հատման կետը: Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\vec{p} = \vec{OA_1} + \vec{A_1P}$: Սակայն $\vec{OA_1}$ և $\vec{A_1P}$ վեկտորները համապատասխանաբար համագիծ են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին: Ուստի գոյություն ունեն այնպիսի x և y թվեր, որ $\vec{OA_1} = x\vec{a}$ և $\vec{A_1P} = y\vec{b}$: Հետևաբար՝ $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, այսինքն՝ $\vec{p}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների:



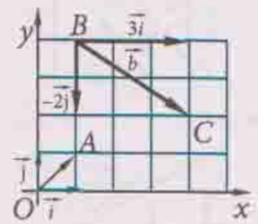
Նկ. 42

Այժմ ապացուցենք, որ վերածման գործակիցներ x-ը և y-ը որոշվում են միակ կերպով: Ենթադրենք, թե $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ վերածման հետ մեկտեղ առկա է ևս մի վերածում՝ $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$: Երկրորդ հավասարությունից հանելով առաջինը և կիրառելով վեկտորների հետ գործողությունների հատկությունները՝ ստանում ենք. $\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}$: Այս հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ $x - x_1$ և $y - y_1$ գործակիցներից յուրաքանչյուրը 0 է: Իսկապես, եթե ընդունենք, որ, ասենք՝ $x - x_1 \neq 0$, ապա ստացված հավասարությունից կորոշվի $\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1}\cdot\vec{b}$, ինչը կնշանակեր, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են. դա կհակասեր թեորեմի պայմանին: Այսպիսով՝

$x - x_1 = 0$ և $y - y_1 = 0$, որտեղից՝ $x = x_1$ և $y = y_1$: Իսկ սա նշանակում է, որ $\vec{p}$ վեկտորի վերածման գործակիցները որոշվում են միակ կերպով: *Թեորեմն ապացուցված է:*

18. Վեկտորի կոորդինատները

Վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է հատվածների չափման միավորին, կանվանենք *միավոր վեկտոր:* Կոորդինատների O սկզբնակետից տեղադրենք երկու՝ $\vec{i}$ և $\vec{j}$ միավոր վեկտորներ այնպես, որ $\vec{i}$ վեկտորի ուղղությունը համընկնի կոորդինատային Ox առանցքի ուղղությանը, իսկ $\vec{j}$ վեկտորի ուղղությունը՝ Oy առանցքի ուղղությանը *(նկ. 43):* $\vec{i}$ և $\vec{j}$ վեկտորներն անվանենք *կոորդինատային վեկտորներ:*



Նկ. 43

Կոորդինատային վեկտորները տարագիծ են, և, ուրեմն, ցանկացած $\vec{p}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ կոորդինատային վեկտորների, այսինքն՝ ներկայացնել $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$ տեսքով: Նշենք, որ վերածման գործակիցները, այն է՝ x և y թվերը, որոշվում են միակ կերպով: $\vec{p}$ վեկտորի՝ ըստ կոորդինատային վեկտորների վերածման գործակիցները կոչվում են *$\vec{p}$ վեկտորի կոորդինատներ*՝ տրված կոորդինատային համակարգում: Վեկտորի կոորդինատները գրառում են ձևավոր փակագծերի մեջ՝ վեկտորի նշանակումից հետո. $\vec{p}\,\{x, y\}$: Նկար 43-ում պատկերված են $\overrightarrow{OA}\,\{1,1\}$ և $\vec{b}\{3,-2\}$ վեկտորները:

Քանի որ զրոյական վեկտորը կարելի է ներկայացնել $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$ տեսքով, ուրեմն նրա կոորդինատներն են $\vec{0}\,\{0,0\}$: Եթե $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ և $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ վեկտորները հավասար են, ապա $x_1 = x_2$ և $y_1 = y_2$: Այսպիսով՝ *հավասար վեկտորների կոորդինատները հավասար են:*

Թվարկենք այն կանոնները, որոնք թույլ են տալիս վեկտորների կոորդինատների միջոցով հաշվել նրանց գումարը, տարբերությունը, վեկտորի ու թվի արտադրյալը:

1^0. *Երկու կամ ավելի վեկտորների գումարի յուրաքանչյուր կոորդինատ հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարին:*

Այս պնդումն ապացուցենք երկու վեկտորի համար:

Դիտարկենք $\vec{a}\{x_1, y_1\}$ և $\vec{b}\{x_2, y_2\}$ վեկտորները: Քանի որ $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ և $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, ապա օգտվելով վեկտորների *հետ գործողությունների հատկությունից՝ ստանում ենք.*

$$\vec{a}+\vec{b} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} = (x_1+x_2)\vec{i} + (y_1+y_2)\vec{j}:$$

Դրանից հետևում է, որ $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{x_1+x_2, y_1+y_2\}$:

Նույն կերպ ապացուցվում է հետևյալ պնդումը.

2^0. *Երկու վեկտորների տարբերության յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների տարբերությանը:*

Այլ խոսքով՝ եթե տրված վեկտորներն են $\vec{a}\{x_1, y_1\}$, $\vec{b}\{x_2, y_2\}$, ապա $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{x_1-x_2, y_1-y_2\}$ (ապացուցեք ինքնուրույն):

3^0. *Վեկտորի և թվի արտադրյալի յուրաքանչյուր կոորդինատ հավասար է վեկտորի համապատասխան կոորդինատի և այդ թվի արտադրյալին:*

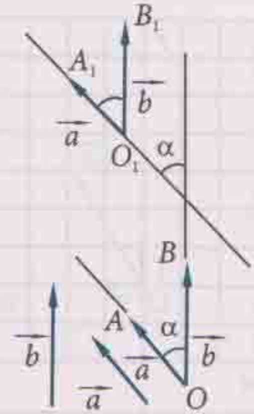
Իսկապես, եթե $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{x, y\}$, իսկ k–ն ցանկացած թիվ է, ապա նկատի ունենալով, որ $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, ստացվում է. $k\vec{a} = k(x\vec{i} + y\vec{j}) = kx\vec{i} + ky\vec{j}$: Իսկ դրանից հետևում է, որ $k\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{kx, ky\}$:

Դիտարկված կանոնները թույլ են տալիս որոշել ցանկացած վեկտորի կոորդինատները, եթե այն ներկայացված է տրված կոորդինատներով վեկտորների հանրահաշվական գումարի տեսքով: Օրինակ՝ պահանջվում է որոշել $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե տրված են. $\vec{a}\{1,-2\}$, $\vec{b}\{0,3\}$, $\vec{c}\{-2,3\}$:

Ըստ 3^0 կանոնի՝ $2\vec{a}$ վեկտորն ունի $\{2,-4\}$, իսկ $-\frac{1}{3}\vec{b}$ վեկտորը՝ $\{0,-1\}$ կոորդինատները: Քանի որ $\vec{p} = \left(2\vec{a}\right) + \left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \vec{c}$, ապա $\vec{p}$ վեկտորի կոորդինատները կարող ենք հաշվել ըստ 1^0 կանոնի. $\{2+0-2, -4-1+3\}$: Այսպիսով՝ $\vec{p}$ վեկտորն ունի $\{0,-2\}$ կոորդինատները:

19. Վեկտորների կազմած անկյունը

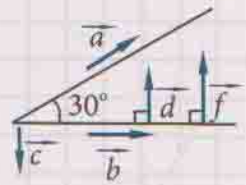
Դիցուք՝ $\vec{a}$–ն և $\vec{b}$–ն երկու տրված վեկտորներ են: Որևէ O կետից տեղադրենք $\vec{OA} = \vec{a}$ և $\vec{OB} = \vec{b}$ վեկտորները: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված չեն, ապա OA և OB ճառագայթները կազմում են AOB անկյուն *(նկ. 44)*: Դրա աստիճանային չափը նշանակենք α–ով: Այդ դեպքում կասենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ *վեկտորների կազմած անկյունը հավասար է* α: Նկատենք, որ α–ն կախված չէ տվյալ O կետի ընտրությունից, որից տեղադրում ենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները (օգտվելով նկար 44–ից՝ ապացուցեք ինքնուրույն): Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, մասնավորապես՝ դրանցից մեկը կամ երկուսը զրոյական են, ապա կհամարենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը 0° է: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը նշանակվում է $\angle(\vec{a}, \vec{b})$:



Նկ. 44

Նկար 45–ում պատկերված վեկտորների կազմած անկյուններն են. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 120^\circ$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$, $\angle(\vec{d}, \vec{f}) = 0^\circ$, $\angle(\vec{d}, \vec{c}) = 180^\circ$:

Երկու վեկտորներ կոչվում են ուղղահայաց (կամ փոխուղղահայաց), եթե նրանց կազմած անկյունը 90° է: Նկար 45–ում $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{d}$, $\vec{b} \perp \vec{f}$:



Նկ. 45

Խնդիրներ

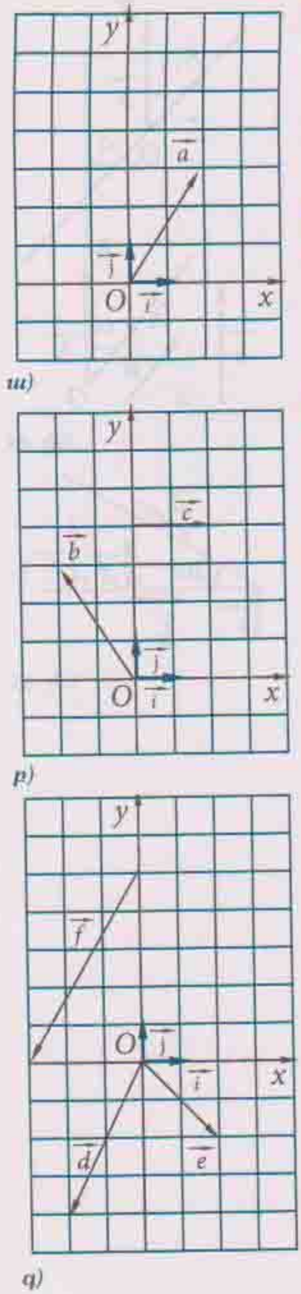
103. Գտեք այնպիսի k թիվ, որ տեղի ունենա $\vec{n} = k\vec{m}$ հավասարությունը, եթե հայտնի է, որ՝ ա) $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորները հակուղղված են և $|\vec{m}| = 0{,}5$ սմ, $|\vec{n}| = 2$ սմ, բ) $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորները համուղղված են և $|\vec{m}| = 12$ սմ, $|\vec{n}| = 4$ դմ, գ) $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորները հակուղղված են և $|\vec{m}| = 400$ մմ, $|\vec{n}| = 4$ դմ, դ) $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորները համուղղված են և $|\vec{m}| = \sqrt{2}$ *սմ*, $|\vec{n}| = \sqrt{50}$ *սմ* :

104. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում, իսկ M–ը AO հատվածի միջնակետն է: Եթե հնարավոր է, գտեք այնպիսի k թիվ, որ տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը. ա) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AO}$, բ) $\overrightarrow{BO} = k\overrightarrow{BD}$, գ) $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{CA}$, դ) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$, ե) $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DA}$, զ) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{CA}$, է) $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AM}$, ը) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CM}$, թ) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$, ժ) $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{BD}$:

105. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են: Արդյոք համագի՞ծ են՝ ա) $\vec{a} + 3\vec{b}$ և $\vec{a}$ վեկտորները, բ) $\vec{b} - 2\vec{a}$ և $\vec{a}$ վեկտորները: Պատասխանը հիմնավորեք:

106. Ապացուցեք, որ եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են, ապա տարագիծ են նաև՝ ա) $\vec{a} + \vec{b}$ և $\vec{a} - \vec{b}$ վեկտորները, բ) $2\vec{a} - \vec{b}$ և $\vec{a} + \vec{b}$ վեկտորները, գ) $\vec{a} + \vec{b}$ և $\vec{a} + 3\vec{b}$ վեկտորները:

107. M կետը գտնվում է $ABCD$ զուգահեռագծի AC անկյունագծի վրա, ընդ որում՝ $AM : MC = 4 : 1$: $\overrightarrow{AM}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ և $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ վեկտորների:



Նկ. 46

108. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են: Գտեք այնպիսի x և y թվեր, որոնք բավարարում են հետևյալ հավասարությանը.
ա) $3\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + \vec{b}$, բ) $4\vec{a} - x\vec{a} + 5\vec{b} + y\vec{b} = \vec{0}$,
գ) $x\vec{a} + 3\vec{b} - y\vec{b} = \vec{0}$, դ) $\vec{a} + \vec{b} - 3y\vec{a} + x\vec{b} = \vec{0}$:

109. Գծեք կոորդինատների Oxy ուղղանկյուն համակարգը և $\vec{i}, \vec{j}$ կոորդինատային վեկտորները: Կառուցեք O սկզբնակետով վեկտորներ, որոնք տրված են հետևյալ կոորդինատներով. $\vec{a}\{3,0\}$, $\vec{b}\{2,-1\}$, $\vec{c}\{0,-3\}$, $\vec{d}\{1,1\}$, $\vec{e}\{2,\sqrt{2}\}$:

110. 46(ա),(բ),(գ) նկարներում պատկերված $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ վեկտորները վերածեք ըստ $\vec{i}$ և $\vec{j}$ կոորդինատային վեկտորների և գտեք դրանց կոորդինատները:

111. Որոշեք $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = 8\vec{i}$, $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{e} = -2\vec{j}$, $\vec{f} = -\vec{i}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրի կոորդինատները:

112. Գրառեք հետևյալ վեկտորների վերածումը՝ ըստ $\vec{i}$ և $\vec{j}$ կոորդինատային վեկտորների. ա) $\vec{x}\left\{-3,\frac{1}{5}\right\}$, բ) $\vec{y}\{-2,-3\}$, գ) $\vec{z}\{-1,0\}$, դ) $\vec{u}\{0,3\}$, ե) $\vec{v}\{0,1\}$:

113. Գտեք x և y թվերը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին. ա) $x\vec{i} + y\vec{j} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$, բ) $-3\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + 7\vec{j}$, գ) $x\vec{i} + y\vec{j} = -4\vec{i}$, դ) $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0}$:

114. Գտեք $\vec{a} + \vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե՝ ա) $\vec{a}\{3,2\}$, $\vec{b}\{2,5\}$, բ) $\vec{a}\{3,-4\}$, $\vec{b}\{1,5\}$, գ) $\vec{a}\{-4,-2\}$, $\vec{b}\{5,3\}$, դ) $\vec{a}\{2,7\}$, $\vec{b}\{-3,-7\}$:

115. Գտեք $\vec{a} - \vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե՝ ա) $\vec{a}\{5,3\}$, $\vec{b}\{2,1\}$, բ) $\vec{a}\{3,2\}$, $\vec{b}\{-3,2\}$, գ) $\vec{a}\{3,6\}$, $\vec{b}\{4,-3\}$, դ) $\vec{a}\{-5,-6\}$, $\vec{b}\{2,-4\}$:

116. Գտեք $2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$ վեկտորների կոորդինատները, եթե $\vec{a}\{3,2\}$:

117. Տրված են $\vec{a}\{2,4\}$, $\vec{b}\{-2,0\}$, $\vec{c}\{0,0\}$, $\vec{d}\{-2,-3\}$, $\vec{e}\{2,-3\}$, $\vec{f}\{0,5\}$ վեկտորները: Գտեք այդ վեկտորներից յուրաքանչյուրի հակադիր վեկտորի կոորդինատները:

118. *ABCD* քառակուսու անկյունագծերը հատվում են *O* կետում: Գտեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը. ա) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AC}$, բ) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{DA}$, գ) $\overrightarrow{OA}$ և $\overrightarrow{OB}$, դ) $\overrightarrow{AO}$ և $\overrightarrow{OB}$, ե) $\overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{BD}$, զ) $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{DB}$, է) $\overrightarrow{AO}$ և $\overrightarrow{OC}$:

119. *ABCD* շեղանկյան անկյունագծերը հատվում են *O* կետում, և *BD* անկյունագիծը հավասար է շեղանկյան կողմին: Գտեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը. ա) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AD}$, բ) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{DA}$, գ) $\overrightarrow{BA}$ և $\overrightarrow{AD}$, դ) $\overrightarrow{OC}$ և $\overrightarrow{OD}$, ե) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{DC}$, զ) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$:

ԳԼՈՒԽ VIII-Ի ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

1. Բացատրեք՝ ինչպես է ներմուծվում ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգը:
2. Ինչպե՞ս են որոշվում հատվածի միջնակետի կոորդինատները նրա ծայրակետերի կոորդինատներով:
3. Արտածեք երկու կետերի հեռավորության բանաձևը՝ արտահայտված այդ կետերի կոորդինատներով:
4. Ո՞ր հավասարումն է կոչվում տրված գծի հավասարում: Բերեք օրինակներ:
5. Արտածեք տրված շառավիղով և տրված կենտրոնով շրջանագծի հավասարումը:
6. Գծեք կոորդինատների առանցքները և կառուցեք միավոր շառավիղով շրջանագիծ: Բացատրեք, թե ինչպես կարելի է ստուգել՝ տրված $M(a,b)$ կետը գտնվու՞մ է արդյոք՝ ա) շրջանագծի վրա, բ) շրջանագծով եզերված շրջանի մեջ, գ) շրջանից դուրս:
7. Գրեք տրված $M(x_0,y_0)$ կետով անցնող այն ուղիղների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին: Դիտարկեք նաև $x_0 = 0$ և $y_0 = 0$ դեպքերը:
8. Բերեք օրինակներ, որոնցում երկրաչափական խնդիրները լուծվում են կոորդինատների մեթոդի կիրառությամբ:
9. Բերեք վեկտորական մեծությունների օրինակներ:
10. Սահմանեք վեկտորը: Բացատրեք, թե ինչ է զրոյական վեկտորը:
11. Ի՞նչն է կոչվում ոչ զրոյական վեկտորի երկարություն: Որքա՞ն է զրոյական վեկտորի երկարությունը:
12. Ո՞ր վեկտորներն են կոչվում համագիծ: Պատկերեք համուղղված $\vec{a}$, $\vec{b}$ վեկտորներ և հակուղղված $\vec{c}$, $\vec{d}$ վեկտորներ:

13. Սահմանեք հավասար վեկտորների հասկացությունը:

14. Պարզաբանեք «$\vec{a}$ վեկտորը տեղադրված է A կետից» արտահայտության իմաստը: Ապացուցեք, որ ցանկացած կետից կարելի է տեղադրել տրվածին հավասար վեկտոր, ընդ որում՝ միակը:

15. Պարզաբանեք, թե որ վեկտորն է կոչվում երկու տրված վեկտորների գումար: Ո՞րն է երկու վեկտորների գումարման եռանկյան կանոնը:

16. Ապացուցեք, որ ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի համար $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$:

17. Ձևակերպեք վեկտորների գումարման օրենքները:

18. Ո՞րն է երկու տարագիծ վեկտորների գումարման զուգահեռագծի կանոնը:

19. Ո՞րն է մի քանի վեկտորների գումարման բազմանկյան կանոնը:

20. Ո՞ր վեկտորն է կոչվում երկու վեկտորների տարբերություն: Կառուցեք երկու տրված վեկտորների տարբերությունը:

21. Ո՞ր վեկտորն է կոչվում տրվածին հակադիր վեկտոր: Ձևակերպեք և ապացուցեք վեկտորների տարբերության մասին թեորեմը:

22. Ո՞ր վեկտորն է կոչվում տրված վեկտորի և թվի արտադրյալ:

23. Ինչի՞ է հավասար $k\vec{a}$ արտադրյալը, եթե՝ ա) $\vec{a} = \vec{0}$, բ) $k = 0$:

24. Կարո՞ղ են, արդյոք, տարագիծ լինել $\vec{a}$ և $k\vec{a}$ վեկտորները:

25. Ձևակերպեք վեկտորը թվով բազմապատկման հիմնական հատկությունները:

26. Նկարագրեք, թե ինչ է զուգահեռ տեղափոխումը: Պարզաբանեք, թե ինչ է նշանակում «Զուգահեռ տեղափոխման դեպքում հեռավորությունները պահպանվում են» նախադասությունը:

27. Ձևակերպեք և ապացուցեք համագիծ վեկտորների մասին լեմմը:

28. Ի՞նչ է նշանակում վերածել վեկտորը՝ ըստ երկու տրված վեկտորների:

29. Ձևակերպեք և ապացուցեք վեկտորն ըստ երկու վեկտորների վերածելու մասին թեորեմը:

30. Որո՞նք են կոորդինատային վեկտորները:

31. Ձևակերպեք պնդում ցանկացած վեկտորը ըստ կոորդինատային վեկտորների վերածելու մասին:

32. Պարզաբանեք, թե ինչ է նշանակում «$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը հավասար է α» նախադասությունը: Վեկտորների կազմած անկյունը ո՞ր դեպքում է համարվում $0°$:

33. Ո՞ր երկու վեկտորներն են կոչվում ուղղահայաց:

Լրացուցիչ խնդիրներ

120. Ապացուցեք, որ աբսցիսների առանցքի կամայական երկու՝ $M_1(x_1,0)$ և $M_2(x_2,0)$ կետերի հեռավորությունը հաշվվում է $d=|x_1-x_2|$ բանաձևով:

121. Ապացուցեք, որ $A(4;8)$, $B(12;11)$, $C(7;0)$ գագաթներով ABC եռանկյունը հավասարասրուն է, բայց հավասարակողմ չէ:

122. Ապացուցեք, որ $A(-5;6)$, $B(3;-9)$ և $C(-12;-17)$ գագաթներով ABC եռանկյան A և C անկյունները հավասար են:

123. Ապացուցեք, որ D կետը հավասարահեռ է A, B և C կետերից, եթե՝ ա) $D(1;1)$, $A(5;4)$, $B(4;-3)$, $C(-2;5)$, բ) $D(1;0)$, $A(7;-8)$, $B(-5;8)$, $C(9;6)$:

124. Աբսցիսների առանցքի վրա գտեք կետ, որը հավասարահեռ է $M_1(-2;4)$ և $M_2(6;8)$ կետերից:

125. ABC եռանկյան գագաթների կոորդինատներն են՝ $A(-5;13)$, $B(3;5)$, $C(-3;-1)$: Գտեք՝ ա) եռանկյան կողմերի միջնակետերի կոորդինատները, բ) AC կողմին տարված միջնագիծը, գ) եռանկյան միջին գծերը:

126. Ապացուցեք, որ $ABCD$ քառանկյունը քառակուսի է, եթե նրա գագաթների կոորդինատներն են՝ $A(3;2)$, $B(0;5)$, $C(-3;2)$, $D(0;-1)$:

127. Ապացուցեք, որ $ABCD$ քառանկյունը շեղանկյուն է, եթե նրա գագաթների կոորդինատներն են՝ $A(-2;-3)$, $B(1;4)$, $C(8;7)$, $D(5;0)$: Գտեք նրա մակերեսը:

128. Տրված է $ABCD$ ուղղանկյունը: Ապացուցեք, որ հարթության կամայական M կետի համար տեղի ունի $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$ հավասարությունը:

129. Գրեք $A(3;\ 0)$ և $B(-1;\ 2)$ կետերով անցնող շրջանագծի հավասարումը, եթե նրա կենտրոնն ընկած է $y = x + 2$ ուղղի վրա:

130. Գրեք այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է տրված երեք կետերով. ա) $A(1;\ -4)$, $B(4;\ 5)$, $C(3;\ -2)$, բ) $A(3;\ -7)$, $B(8;\ -2)$, $C(6;\ 2)$:

131. ABC եռանկյան գագաթներն ունեն $A(-7;\ 5)$, $B(3;\ -1)$, $C(5;\ 3)$ կոորդինատները: Կազմեք. ա) AB, BC և CA ուղիղների հավասարումները, բ) եռանկյան միջնագծերն ընդգրկող ուղիղների հավասարումները, գ) այն ուղիղների հավասարումները, որոնց վրա ընկած են եռանկյան միջին գծերը:

132. Ապացուցեք, որ $3x - 1{,}5y + 1 = 0$ և $2x - y - 3 = 0$ հավասարումներով տրված ուղիղները զուգահեռ են:

133. Ապացուցեք, որ A, B և C կետերն ընկած են մի ուղղի վրա, եթե՝ ա) $A(-2;\ 0)$, $B(3;\ 2\frac{1}{2})$, $C(6;\ 4)$, բ) $A(3;\ 10)$, $B(3;\ 12)$, $C(3;\ -6)$, գ) $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 5)$, $C(-10;\ -31)$:

134. Ապացուցեք, որ եթե $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորները համուղղված են, ապա $|\vec{m}+\vec{n}| = |\vec{m}|+|\vec{n}|$, իսկ եթե $\vec{m}$-ը և $\vec{n}$-ը հակուղղված են, ընդ որում՝ $|\vec{m}|\geq|\vec{n}|$, ապա՝ $|\vec{m}+\vec{n}| = |\vec{m}|-|\vec{n}|$:

135. Ապացուցեք, որ ցանկացած $\vec{x}$ և $\vec{y}$ վեկտորների համար տեղի ունեն $|\vec{x}|-|\vec{y}|\leq|\vec{x}+\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|$ անհավասարությունները:

136. ABC եռանկյան BC կողմի վրա նշված է N կետն այնպես, որ $BN=2NC$: $\vec{AN}$ վեկտորն արտահայտեք $\vec{a} = \vec{BA}$ և $\vec{b} = \vec{BC}$ վեկտորներով:

137. MNP եռանկյան MN և NP կողմերի վրա նշված են, համապատասխանաբար, X և Y կետերն այնպես, որ $MX : XN = 3 : 2$ և $NY : YP = 3 : 2$: $\vec{XY}$ և $\vec{MP}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{a} = \vec{NM}$ և $\vec{b} = \vec{NP}$ վեկտորներով:

138. $ABCD$ սեղանի AD հիմքը երեք անգամ մեծ է BC հիմքից: AD կողմի վրա նշված է այնպիսի K կետ, որ $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AD}$: $\vec{CK}$, $\vec{KD}$ և $\vec{BC}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{a} = \vec{BA}$ և $\vec{b} = \vec{CD}$ վեկտորներով:

139. A, B և C կետերը դասավորված են այնպես, որ $\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$: Ապացուցեք, որ ցանկացած O կետի համար տեղի ունի $\vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{OA}+\frac{2}{3}\vec{OC}$ հավասարությունը:

140. C կետը տրոհում է AB հատվածը $m : n$ հարաբերությամբ՝ հաշված A կետից: Ապացուցեք, որ ցանկացած O կետի համար տեղի ունի $\vec{OC} = \frac{n}{m+n}\vec{OA}+\frac{m}{m+n}\vec{OB}$ հավասարությունը:

141. Դիցուք՝ AA_1-ը, BB_1-ը և CC_1-ը ABC եռանկյան միջնագծերն են, իսկ O-ն կամայական կետ է: Ապացուցեք, որ $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} = \vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1}$:

142*. A-ն և C-ն կամայական քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերն են, իսկ B-ն և D-ն՝ նրա մյուս երկու կողմերի միջնակետերը: Ապացուցեք, որ ցանկացած O կետի համար տեղի ունի $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$ հավասարությունը:

143. Ուղղանկյուն սեղանի անկյուններից մեկը 120° է: Գտեք նրա միջին գիծը, եթե սեղանի փոքր անկյունագիծը և մեծ սրունքը հավասար են a:

144. Ապացուցեք, որ սեղանի սրունքին առընթեր երկու անկյունների կիսորդների հատման կետն ընկած է սեղանի միջին գիծն ընդգրկող ուղղի վրա:

145. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են: Գտեք այնպիսի x թիվ (եթե հնարավոր է), որ $\vec{p}$ և $\vec{q}$ վեկտորները լինեն համագիծ, եթե՝ ա) $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$, բ) $\vec{p}=x\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$, գ) $\vec{p}=\vec{a}+x\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$, դ) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=x\vec{a}+\vec{b}$:

146. Գտեք $\vec{p}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե՝

ա) $\vec{p}=7\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}\{1,1\}$, $\vec{b}\{5,-2\}$,

բ) $\vec{p}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{a}\{6,3\}$, $\vec{b}\{5,4\}$,

գ) $\vec{p}=5\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{a}\left\{\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right\}$, $\vec{b}\{6,-1\}$,

դ) $\vec{p}=3(-2\vec{a}-4\vec{b})$, $\vec{a}\{1,5\}$, $\vec{b}\{-1,-1\}$:

ԳԼՈՒԽ IX
Նման եռանկյուններ

§1 ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

20. Համեմատական հատվածներ

AB և *CD հատվածների հարաբերություն* կոչվում է նրանց երկարությունների հարաբերությունը, այսինքն՝ $\frac{AB}{CD}$ –ն:
Ասում են, որ *AB* և *CD* հատվածները *համեմատական են* A_1B_1 և C_1D_1 հատվածներին, եթե $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$: Օրինակ՝ *AB* և *CD* հատվածները, որոնց երկարություններն են 2 սմ և 1 սմ, համեմատական են A_1B_1 և C_1D_1 հատվածներին, որոնց երկարություններն են 3 սմ և 1,5 սմ: Իսկապես, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{2}{3}$:

Համեմատականության հասկացությունը[1] ներմուծվում է նաև շատ թվով հատվածների համար: Օրինակ՝ *AB*, *CD* և *EF* երեք հատվածները *համեմատական են* A_1B_1, C_1D_1 և E_1F_1 երեք հատվածներին, եթե $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{EF}{E_1F_1}$:

21. Նման եռանկյունների սահմանումը

Հաճախ հանդիպում են այնպիսի առարկաներ, որոնց ձևը նույնն է, իսկ չափսերը տարբեր են: Օրինակ՝ ֆուտբոլի և թենիսի գնդակները, կլոր ափսեն և սկավառակը: Ընդունված է երկրաչափության մեջ միևնույն ձևն ունեցող պատկերներն անվանել *նման պատկերներ*: Նման են, օրինակ, ցանկացած երկու քառակուսի, երկու շրջան և այլն: Ներմուծենք «նման եռանկյուններ» հասկացությունը:

1 Համեմատական հատվածներին անվանում են նաև **համամասնական** հատվածներ:

Դիցուք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ երկու եռանկյունների անկյունները համապատասխանաբար հավասար են. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$: Այդ դեպքում հետևյալ կողմերը՝ AB–ն և A_1B_1–ը, BC–ն և B_1C_1–ը, CA–ն և C_1A_1–ը, կոչվում են նմանակ կողմեր *(նկ. 47)*:

Սահմանում: ***Երկու եռանկյուններ կոչվում են նման, եթե նրանց անկյունները համապատասխանաբար հավասար են, և եռանկյուններից մեկի կողմերը համեմատական են մյուսի նմանակ կողմերին:***

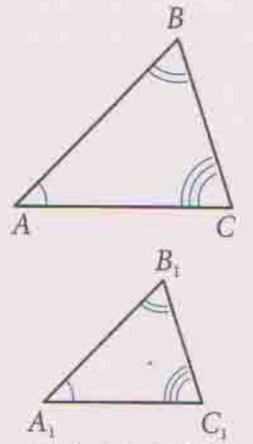
Այլ խոսքով՝ երկու եռանկյուններ նման են, եթե կարելի է դրանք նշանակել ABC և $A_1B_1C_1$ տառերով այնպես, որ

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1, \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k: \qquad (2)$$

k թիվը, որը հավասար է եռանկյունների նմանակ կողմերի հարաբերությանը, կոչվում է *նմանության գործակից*:

ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների նմանությունը նշանակվում է այսպես. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$: Նկար 47–ում պատկերված են նման եռանկյուններ:



Նմանակ կողմերն են՝ AB և A_1B_1, BC և B_1C_1, CA և C_1A_1

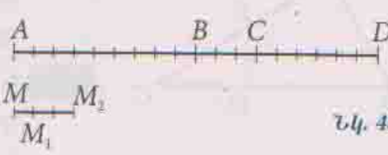
Նկ. 47

Պարզվում է, որ եռանկյունների նմանությունը կարելի է հաստատել՝ ստուգելով (1) և (2) հավասարություններից միայն մի քանիսը: Այդ կարևոր հարցը մենք կուսումնասիրենք հաջորդ պարագրաֆում, որտեղ կդիտարկենք եռանկյունների նմանության երեք հայտանիշ:

Հարցեր և խնդիրներ

147. Գտեք AB և CD հատվածների հարաբերությունը, եթե նրանց երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են 15 սմ և 20 սմ: Արդյոք կփոխվի՞ այդ հարաբերությունը, եթե հատվածների երկարություններն արտահայտվեն միլիմետրերով:

148. Արդյոք համեմատակա՞ն են նկար 48–ում պատկերված հետևյալ հատվածները. ա) AC, CD և M_1M_2, MM_1, բ) AB, BC, CD և MM_2, MM_1, M_1M_2, գ) AB, BD և MM_1, M_1M_2:



Նկ. 48

149. AB, CD հատվածները համեմատական են EF, MN հատվածներին: Գտեք EF–ը, եթե $AB = 5$ սմ, $CD = 80$ մմ, $MN = 1$ դմ:

150. KP և MN հատվածները DO և AL հատվածներին համեմատական են: Գտեք AL–ը, եթե $KP = 8$ դմ, $MN = 40$ սմ, $OD = 1$ մ:

151. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում, և CD կողմը 10 սմ է: Գտեք զուգահեռագծի պարագիծը, եթե $\frac{BC}{CD}=\frac{AC}{OC}$:

152. ABC և MNK եռանկյունները նման են: Նշեք եռանկյունների նմանակ կողմերը, եթե՝ ա) $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle K$, բ) $\angle A = \angle K$, $\angle C = \angle M$:

153. ABC և DEF եռանկյունները նման են: $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle F$, $EF = 14$ սմ, $DF = 20$ սմ, $BC = 21$ սմ: Գտեք AC-ն:

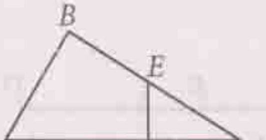
154. Նմա՞ն են, արդյոք, ABC և DEF եռանկյունները, եթե $\angle A = 106^\circ$, $\angle B = 34^\circ$, $\angle E = 106^\circ$, $\angle F = 40^\circ$, $AC = 4{,}4$ սմ, $AB = 5{,}2$ սմ, $BC = 7{,}6$ սմ, $DE = 15{,}6$ սմ, $DF = 22{,}8$ սմ, $EF = 13{,}2$ սմ:

155. ABC և KMN նման եռանկյունների մեջ AB և KM, BC և MN կողմերը նմանակ են: Գտեք KMN եռանկյան կողմերը, եթե $AB = 4$ սմ, $BC = 5$ սմ, $CA = 7$ սմ, $\frac{KM}{AB} = 2{,}1$:

156. KPF և EMT եռանկյունները նման են, ընդ որում՝ $\frac{KP}{ME}=\frac{PF}{MT}=\frac{KF}{ET}$, $\angle F = 20^\circ$, $\angle E = 40^\circ$: Գտեք այդ եռանկյան մյուս անկյունները:

157. Նման եռանկյունների երկու նմանակ կողմերն են 2 սմ և 5 սմ: Առաջին եռանկյան մյուս երկու կողմերն են 3 սմ և 4 սմ: Գտեք երկրորդ եռանկյան պարագիծը:

158. Նման ուղղանկյուն եռանկյունների երկու նմանակ կողմերը հարաբերում են, ինչպես 2 : 3: Նրանցից առաջինի էջերն են 3 սմ և 4 սմ: Գտեք յուրաքանչյուր եռանկյան մակերեսը:



Նկ. 49

159. Նկար 49-ում ABC և DEC եռանկյունները նման են, ընդ որում՝ DE-ն և AB-ն զուգահեռ չեն, $AD = 6$ սմ, $DC = 10$ սմ, $BC = 14$ սմ: Գտեք CE-ն:

160. Հողամասի հատակագիծն ունի հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան ձև: Հատակագծում պատկերված եռանկյան մակերեսը 72 սմ^2 է: Գտեք հողամասի մակերեսը, եթե նրա հատակագիծը կատարվել է 1 : 1000 մասշտաբով:

161. Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան տեսք ունեցող այգու մակերեսը 8 հա է, իսկ նրա հատակագծում պատկերված եռանկյան մակերեսը՝ 200 սմ^2: Ի՞նչ մասշտաբով է գծվել այգու հատակագիծը:

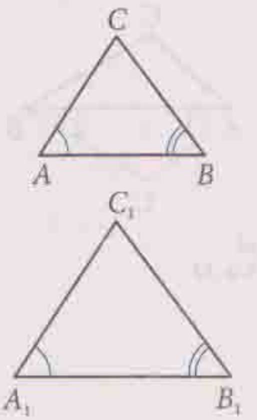
§2 ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

22. Եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը

Թեորեմ: ***Եթե մի եռանկյան երկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան երկու անկյուններին, ապա այդպիսի եռանկյունները նման են:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ ABC-ն և $A_1B_1C_1$-ը երկու այնպիսի եռանկյուններ են, որոնցում $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ *(նկ. 50)*: Ապացուցենք, որ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$:

Ըստ եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմի՝ $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$, $\angle C_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1$: Հետևաբար՝ $\angle C = \angle C_1$: Այսպիսով՝ ABC եռանկյան անկյունները համապատասխանաբար հավասար են $A_1B_1C_1$ եռանկյան անկյուններին:



Նկ. 50

Ապացուցենք, որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների նմանակ կողմերը համեմատական են: Քանի որ $\angle A = \angle A_1$ և $\angle C = \angle C_1$, ապա ըստ հավասար անկյուն ունեցող եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին թեորեմի՝ $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$

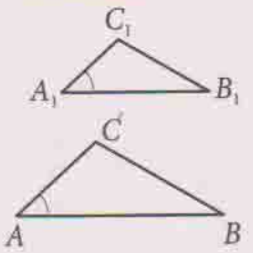
և $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$ *(տես կետ 43-ը 8-րդ դասարանի դասագրքում):*

Այս հավասարություններից հետևում է՝ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$: Նույն եղանակով, օգտվելով $\angle A = \angle A_1$ և $\angle B = \angle B_1$ հավասարություններից, ստանում ենք՝ $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$:

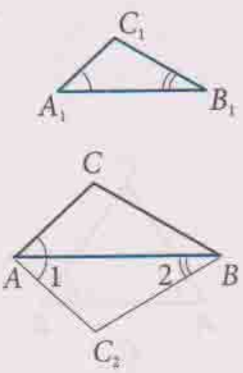
Այսպիսով՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների նմանակ կողմերը համեմատական են: *Թեորեմն ապացուցված է:*

23. Եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշը

Թեորեմ: ***Եթե մի եռանկյան երկու կողմերը համեմատական են մյուս եռանկյան երկու կողմերին, իսկ այդ կողմերով կազմված անկյունները հավասար են, ապա այդպիսի եռանկյունները նման են:***



ա) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$



բ)
Նկ. 51

Ապացուցում: Դիտարկենք երկու՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններ, որոնցում $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$, *(նկ. 51(ա))*: Ապացուցենք, որ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$: Դրա համար, նկատի ունենալով եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը, բավական է ապացուցել, որ $\angle B = \angle B_1$:

Դիտարկենք այնպիսի ABC_2 եռանկյուն, որում $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ *(նկ. 51(բ))*: Ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի՝ ABC_2 և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են: Ուրեմն՝ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$: Մյուս կողմից, ըստ պայմանի՝ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$:

Այս երկու հավասարություններից ստանում ենք, որ $AC = AC_2$: Այսպիսով՝ ABC և ABC_2 եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երկու կողմի և նրանց կազմած անկյան (AB–ն ընդհանուր կողմ է, $AC = AC_2$ և $\angle A = \angle 1$, քանի որ $\angle A = \angle A_1$ և $\angle 1 = \angle A_1$): Դրանից հետևում է, որ $\angle B = \angle 2$: Իսկ քանի որ $\angle 2 = \angle B_1$, ապա $\angle B = \angle B_1$:

Թեորեմն ապացուցված է:

24. Եռանկյունների նմանության երրորդ հայտանիշը

Թեորեմ: ***Եթե մի եռանկյան երեք կողմերը համեմատական են մյուս եռանկյան երեք կողմերին, ապա այդպիսի եռանկյունները նման են:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների կողմերը համեմատական են. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$: (1)

Ապացուցենք, որ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$: Դրա համար, հաշվի առնելով եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշը, բավական է ապացուցել, որ $\angle A = \angle A_1$:

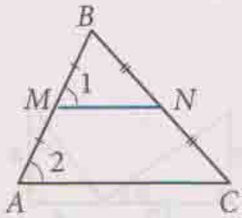
Դիտարկենք այնպիսի ABC_2 եռանկյուն, որում $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ *(նկ. 51(բ))*: Ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի՝ ABC_2 և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են: Ուրեմն՝

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}$$

Համեմատելով այս և (1) հավասարությունները՝ ստանում ենք. $BC = BC_2$, $CA = C_2A$: Այսպիսով՝ ABC և ABC_2 եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երեք կողմի: Դրանից հետևում է, որ $\angle A = \angle 1$: Եվ քանի որ $\angle 1 = \angle A_1$, ուրեմն $\angle A = \angle A_1$: *Թեորեմն ապացուցված է:*

25. Եռանկյունների նմանության մի քանի կիրառություններ

1. *Եռանկյան միջին գծի հատկությունը*: Եռանկյան միջին գիծ մենք անվանել ենք նրա երկու կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածը: Ապացուցել ենք թեորեմ եռանկյան միջին գծի մասին. այն է՝ ***եռանկյան միջին գիծը զուգահեռ է նրա կողմերից մեկին և հավասար է այդ կողմի կեսին:***



Նկ. 52

Այժմ այս թեորեմն ապացուցենք մեկ այլ եղանակով՝ օգտվելով եռանկյունների նմանության հայտանիշներից:

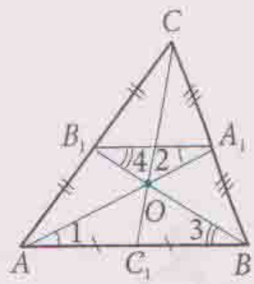
Դիցուք՝ MN-ը ABC եռանկյան միջին գիծն է *(նկ. 52)*: Ապացուցենք, որ $MN \parallel AC$ և $MN = \frac{1}{2}AC$:

BMN և BAC եռանկյունները նման են՝ ըստ եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշի ($\angle B$-ն ընդհանուր է, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$): Ուրեմն՝ $\angle 1 = \angle 2$ և $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$: Առաջին՝ $\angle 1 = \angle 2$ հավասարությունից բխում է, որ $MN \parallel AC$ (բացատրեք՝ ինչու), իսկ երկրորդ հավասարությունից՝ $MN = \frac{1}{2}AC$:

Ապացուցումն ավարտված է:

2. *Եռանկյան միջնագծերի հատկությունը:* Մենք գիտենք, որ եռանկյան չորս նշանավոր կետերից մեկը նրա միջնագծերի հատման կետն է: Պարզվում է, որ եռանկյան միջնագծերն օժտված են մի կարևոր հատկությամբ. այն է՝ ***եռանկյան միջնագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով տրոհվում 2 : 1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:***

Այս հատկությունն ապացուցելիս դարձյալ օգտվենք եռանկյունների նմանության հայտանիշներից:



Նկ. 53

Դիտարկենք կամայական ABC եռանկյուն: O տառով նշանակենք նրա AA_1 և BB_1 միջնագծերի հատման կետը և տանենք A_1B_1 միջին գիծը *(նկ. 53)*: Քանի որ A_1B_1-ը զուգահեռ է AB կողմին, ուրեմն $\angle 1 = \angle 2$ և $\angle 3 = \angle 4$: Հետևաբար՝ AOB և A_1OB_1 եռանկյունները, ըստ երկու անկյան, նման են: Դա նշանակում է, որ այդ եռանկյունների կողմերը համեմատական են.

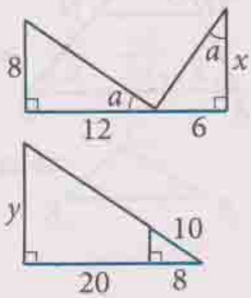
$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}:$$

Բայց քանի որ $AB = 2A_1B_1$, ապա $AO = 2A_1O$ և $BO = 2B_1O$: Այսպիսով՝ AA_1 և BB_1 միջնագծերից յուրաքանչյուրը հատման O կետով տրոհվում է 2 : 1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

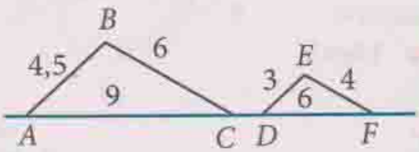
Նույն կերպ ապացուցվում է, որ BB_1 և CC_1 միջնագծերը ևս հատման կետով տրոհվում են նույն 2 : 1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից: Հետևաբար՝ այդ հատման կետը համընկնում է O կետին:

Այսպիսով՝ ABC եռանկյան բոլոր միջնագծերը հատվում են O կետում և այդ կետով տրոհվում $2:1$ հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

Ապացուցումն ավարտված է:



Նկ. 54



Նկ. 55

Հարցեր և խնդիրներ

162. Ըստ նկար 54–ի տվյալների՝ գտեք x–ը և y–ը:

163. ABC և DEF եռանկյունների մեջ $\angle A = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $AC = 6$, $EF = 2$, $AB = 3{,}3$: DF կողմը BC կողմից փոքր է $3{,}2$–ով: Գտեք այդ եռանկյունների անհայտ կողմերը:

164. AB և CD հատվածները հատվում են O կետում, $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$: Ապացուցեք, որ $\angle CBO = \angle DAO$:

165. Ապացուցեք, որ նկար 55–ում պատկերված եռանկյունները նման են:

166. $ABCD$ զուգահեռագծի A գագաթով տարված է ուղիղ, որը հատում է BC կողմը E կետում, իսկ DC կողմի շարունակությունը՝ F կետում: Ապացուցեք, որ $\Delta ABE \sim \Delta EFC$:

167. $ABCD$ զուգահեռագծի CD կողմի վրա նշված է E կետը: AE և BC ուղիղները հատվում են F կետում: Գտեք՝ ա) EF–ը և FC–ն, եթե $DE = 8$ սմ, $EC = 4$ սմ, $BC = 7$ սմ, $AE = 10$ սմ, բ) DE–ն և EC–ն, եթե $AB = 8$ սմ, $AD = 5$ սմ, $CF = 2$ սմ:

168. AB և CD հիմքերով $ABCD$ սեղանի անկյունագծերը հատվում են O կետում: Ապացուցեք, որ ABO և CDO եռանկյունները նման են:

169. AB և CD հիմքերով $ABCD$ սեղանի անկյունագծերը հատվում են O կետում: Գտեք՝ ա) AB–ն, եթե $OB = 4$ սմ, $OD = 10$ սմ, $DC = 25$ սմ, բ) $\frac{AO}{OC}$–ն և $\frac{BO}{OD}$–ն, եթե $AB = a$, $DC = b$, գ) AO–ն, եթե $AB = 9{,}6$ դմ, $DC = 24$ սմ, $AC = 15$ սմ:

170. Նման են, արդյոք, հավասարասրուն եռանկյունները, եթե նրանք ունեն՝ ա) մեկական հավասար սուր անկյուն, բ) մեկական հավասար բութ անկյուն, գ) մեկական ուղիղ անկյուն: Պատասխանը հիմնավորեք:

171. ABC եռանկյան AB կողմը 15 սմ է, իսկ AC կողմը՝ 20 սմ: AB կողմի վրա անջատված է $AD = 8$ սմ, իսկ AC կողմի վրա՝ $AE = 6$ սմ հատվածը: Նման են, արդյոք, ABC և ADE եռանկյունները:

172. Նման են, արդյոք, երկու ուղղանկյուն եռանկյունները, եթե դրանցից մեկն ունի 40°–ի անկյուն, իսկ մյուսը՝ ա) 50°–ին հավասար անկյուն, բ) 60°–ին հավասար անկյուն:

173. ABC եռանկյան AB կողմին զուգահեռ ուղիղը AC կողմը հատում է P, իսկ BC կողմը՝ Q կետում: Ապացուցեք, որ ABC և PQC եռանկյունները նման են:

174. ABC եռանկյան մեջ տարված է AC կողմին զուգահեռ DE հատվածը (D կետը գտնվում է AB, իսկ E կետը՝ BC կողմի վրա): Գտեք AD–ն, եթե $AB = 16$ սմ, $AC = 20$ սմ, $DE = 15$ սմ:

175. ABC եռանկյան AC կողմին զուգահեռ ուղիղը AB կողմը հատում է D, իսկ BC կողմը՝ E կետում: Գտեք DE հատվածի երկարությունը, եթե՝ ա) $AC = 20$ սմ, $AB = 17$ սմ և $BD = 11{,}9$ սմ, բ) $AC = 18$ դմ, $AB = 15$ դմ և $AD = 10$ դմ:

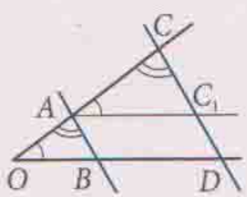
176. Սեղանի հիմքերը հավասար են 5 սմ և 8 սմ, իսկ սրունքները՝ 3,6 սմ և 3,9 սմ: Սրունքների շարունակությունները հատվում են M կետում: Գտեք M կետի հեռավորությունները փոքր հիմքի ծայրակետերից:

177. ABC եռանկյան AB, BC և CA կողմերի վրա վերցված են, համապատասխանաբար, M, N և P կետերն այնպես, որ $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$: Գտեք $AMNP$ քառանկյան կողմերը, եթե՝ ա) $AB = 10$ սմ, $AC = 15$ սմ, $PN : MN = 2 : 3$, բ) $AM = AP$, $AB = a$, $AC = b$:

178. $ABCD$ սեղանի անկյունագծերը հատվում են O կետում: BO և OD հատվածները հարաբերում են՝ ինչպես $1 : 3$: BC և AD հիմքերի գումարը 4,8 սմ է: Գտեք սեղանի հիմքերը:

179. O անկյան կողմերը հատվել են AB և CD զուգահեռ ուղիղներով: Ապացուցեք, որ OA և AC հատվածները համեմատական են OB և BD հատվածներին *(նկ. 56)*:

Լուծում: A կետով տանենք BD ուղղին զուգահեռ AC_1 ուղիղը (C_1–ը այդ և CD ուղիղների հատման կետն է): Այդ դեպքում, ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի, $\Delta OAB \sim \Delta ACC_1$ ($\angle O = \angle CAC_1$, $\angle OAB = \angle C$): Հետևաբար՝ $\dfrac{OA}{AC} = \dfrac{OB}{AC_1}$: Քանի որ $AC_1 = BD$ (բացատրեք, թե ինչու), ուրեմն՝ $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AC}{BD}$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:



Նկ. 56

180. A անկյան կողմերը հատվել են BC և DE զուգահեռ ուղիղներով, ընդ որում՝ B և D կետերը գտնվում են անկյան մի կողմի, իսկ C և E կետերը՝ մյուս կողմի վրա: Գտեք՝ ա) AC–ն, եթե $CE = 10$ սմ, $AD = 22$ սմ, $BD = 8$ սմ, բ) BD–ն և DE–ն, եթե $AB = 10$ սմ, $AC = 8$ սմ, $BC = 4$ սմ, $CE = 4$ սմ, գ) BC–ն, եթե $AB : BD = 2 : 1$ և $DE = 12$ սմ:

181. a և b ուղիղները հատվել են AA_1, BB_1, CC_1 զուգահեռ ուղիղներով, ընդ որում՝ A, B և C կետերը գտնվում են a ուղղի, իսկ A_1, B_1 և C_1 կետերը՝ b ուղղի վրա: Ապացուցեք, որ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$:

182. Տրված A անկյան կողմերից մեկի վրա տեղադրված են $AB = 5$ սմ և $AC = 16$ սմ հատվածները: Այդ անկյան մյուս կողմի վրա տեղադրված են $AD = 8$ սմ և $AF = 10$ սմ հատվածները: Արդյոք նման են ACD և AFB եռանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:

183. Նմա՞ն են, արդյոք, ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները, եթե՝ ա) $AB = 3$ սմ, $BC = 5$ սմ, $CA = 7$ սմ, $A_1B_1 = 4{,}5$ սմ, $B_1C_1 = 7{,}5$ սմ, $C_1A_1 = 10{,}5$ սմ, բ) $AB = 1{,}7$ սմ, $BC = 3$ սմ, $CA = 4{,}2$ սմ, $A_1B_1 = 34$ դմ, $B_1C_1 = 60$ դմ, $C_1A_1 = 84$ դմ:

184. Ապացուցեք, որ երկու հավասարակողմ եռանկյունները նման են:

185. ABC եռանկյան AM միջնագիծը 18 սմ է: Գտեք միջնագծերի հատման O կետի հեռավորությունը՝ ա) A գագաթից, բ) M կետից, գ) AM հատվածի միջնակետից:

186. Տրված եռանկյան միջնագծերն են 15 սմ, 18 սմ և 21 սմ: Գտեք այն եռանկյան միջնագծերի երկարությունները, որի կողմերը տրված եռանկյան միջին գծերն են:

187. Ապացուցեք, որ կամայական ուռուցիկ քառանկյան կողմերի միջնակետերը զուգահեռագծի գագաթներ են:

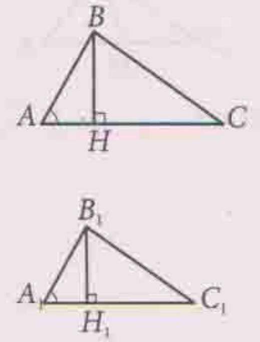
§3 ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

26. Նման եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը

Դուք արդեն գիտեք *նման եռանկյունների* սահմանումը և եռանկյունների նմանության հայտանիշները: Այժմ հետազոտենք նման եռանկյունների հատկությունները:

Թեորեմ: ***Երկու նման եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցի քառակուսուն:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են *(նկ. 57)*, ընդ որում՝ A, B և C անկյունները համապատասխանաբար հավասար են A_1, B_1 և C_1 անկյուններին, իսկ նմանության գործակիցը հավասար է k: Այդ եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար նշանակենք S և S_1: Ապացուցենք, որ $\frac{S}{S_1}=k^2$:



Նկ. 57

Տանենք եռանկյունների համապատասխան բարձրությունները՝ BH-ը և B_1H_1-ը (AC-ն և A_1C_1-ը նմանակ կողմեր են): Քննության առնենք այն դեպքը, երբ $\angle A$-ն և $\angle A_1$-ը ուղիղ անկյուն չեն (դրանց ուղիղ անկյուն լինելու դեպքը քննեք ինքնուրույն): Քանի որ $\angle A = \angle A_1$, և $\angle AHB = \angle A_1H_1B_1$ (որպես ուղիղ անկյուններ), ապա ABH և $A_1B_1H_1$ եռանկյունները նման են (նմանության առաջին հայտանիշ): Ուրեմն՝ $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BH}{B_1H_1}$:

Բայց $\frac{AB}{A_1B_1}=k$, ուրեմն՝ $\frac{HB}{H_1B_1}=k$, այսինքն՝ $HB = k\cdot B_1H_1$:

Հետևաբար՝ $S=\frac{1}{2}AC\cdot BH=\frac{1}{2}k\cdot A_1C_1\cdot k\cdot B_1H_1=k^2\cdot\frac{1}{2}\cdot A_1C_1\cdot B_1H_1=k^2\cdot S_1$:

Ուրեմն՝ $\frac{S}{S_1}=k^2$: *Թեորեմն ապացուցված է:*

Թեորեմից մասնավորապես հետևում է, ***որ նման եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են, ինչպես նմանակ կողմերի քառակուսիները:***

27. Նման եռանկյունների գծային տարրերի հարաբերությունը

ա) Երկու նման եռանկյունների պարագծերի հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:

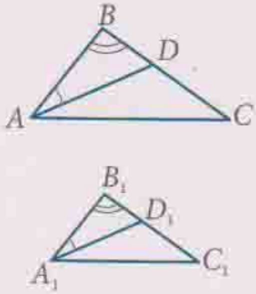
Իսկապես, եթե ABC եռանկյան կողմերն են a–ն, b–ն, c–ն, իսկ նրան նման $A_1B_1C_1$ եռանկյան նմանակ կողմերը՝ համապատասխանաբար a_1–ը, b_1–ը, c_1–ը, և նմանության գործակիցը հավասար է k, ապա $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k$: Այստեղից՝ $a=ka_1$, $b=kb_1$, $c=kc_1$: Հետևաբար՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների P և P_1 պարագծերի համար տեղի ունի $P=a+b+c=ka_1+kb_1+kc_1=k(a_1+b_1+c_1)=kP_1$ հավասարությունը: Ուրեմն՝ $\frac{P}{P_1}=k$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

բ) Երկու նման եռանկյունների նմանակ կողմերին տարված բարձրությունների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:

Իսկապես, դիտենք նկար 57–ը: Քանի որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են, ուրեմն նրանց համապատասխան անկյունները, օրինակ՝ $\angle A$–ն և $\angle A_1$–ը, հավասար են: Հետևաբար՝ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի, նման են նաև ABH և $A_1B_1H_1$ եռանկյունները, որտեղ BH–ը և B_1H_1–ը AC և A_1C_1 նմանակ կողմերին տարված բարձրություններն են: Ուստի՝ $k=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BH}{B_1H_1}$, այսինքն՝ $\frac{BH}{B_1H_1}=k$:

Պնդումը համանման ձևով ապացուցվում է նաև մյուս նմանակ կողմերին տարված բարձրությունների համար:

գ) Երկու նման եռանկյունների նմանակ կողմերին տարված կիսորդների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:

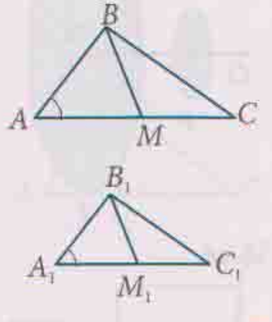


Նկ. 58

Դիցուք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են, k–ն նմանության գործակիցն է, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, իսկ AD–ն և A_1D_1–ը BC և B_1C_1 նմանակ կողմերին տարված կիսորդներն են *(նկ. 58)*: Այդ դեպքում ABD և $A_1B_1D_1$ եռանկյունները նման են՝ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի ($\angle BAD=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle A_1=\angle B_1A_1D_1$, իսկ $\angle B=\angle B_1$): Ուրեմն՝ $k=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AD}{A_1D_1}$: Պնդումը համանման ձևով ապացուցվում է նաև մյուս նմանակ կողմերին տարված կիսորդների համար:

դ) Երկու նման եռանկյունների նմանակ կողմերին պարված միջնագծերի հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:

Դիցուք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են, k–ն նմանության գործակիցն է, AC–ն և A_1C_1–ը նմանակ կողմեր են *(նկ. 59)*: Քանի որ $AM = \frac{1}{2}AC$, $A_1M_1 = \frac{1}{2}A_1C_1$, ապա ABM և $A_1B_1M_1$ եռանկյունները նման են՝ ըստ եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշի ($\angle A = \angle A_1$, $AB = k \cdot A_1B_1$, $AM = k \cdot A_1M_1$): Դրանից հետևում է, որ $\frac{BM}{B_1M_1} = k$: Պնդումը համանման ձևով ապացուցվում է նաև մյուս նմանակ կողմերին տարված միջնագծերի համար:



Նկ. 59

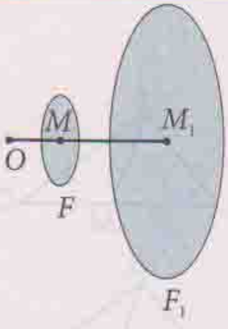
28. Երկրաչափական պատկերների նմանության մասին

Նմանության հասկացությունը կարելի է ներմուծել ոչ միայն եռանկյունների, այլև կամայական պատկերների համար:

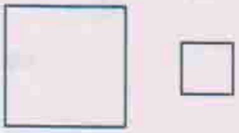
Դիտենք երկու պատկեր՝ F–ը և F_1–ը: F պատկերի յուրաքանչյուր կետին համեմատման մեջ դնենք *(համադրենք)* F_1 պատկերի մի կետ: Միաժամանակ ընդունենք, որ F_1 պատկերի յուրաքանչյուր կետը համադրվում է F պատկերի միայն մեկ կետին: Այդպիսի համադրվող կետերն ակնառու պատկերացնելու համար կարելի է դիտել, օրինակ, որևէ առարկայի երկու լուսանկարները, որոնք միմյանցից տարբերվում են միայն չափերով:

Դիցուք՝ F պատկերի կամայական երկու՝ M և N կետերին համադրվում են F_1 պատկերի երկու՝ M_1 և N_1 կետերը: Կազմենք $k = \frac{M_1N_1}{MN}$ հարաբերությունը: Եթե ընտրված բոլոր կետերի զույգերի դեպքում բավարարվում է մի պայման, այն է՝ *ստացվում է նույն k դրական թիվը, ապա կասենք, որ այդ F և F_1 պատկերները նման են:* k թիվը կոչվում է *նմանության գործակից:* Այն, փաստորեն, ցույց է տալիս, թե մի պատկերի կամայական երկու կետերի հեռավորությունը քանի անգամ է մեծ մյուս պատկերի՝ դրանց համադրված երկու կետերի հեռավորությունից:

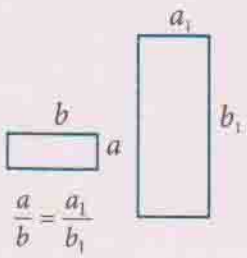
Նման պատկերների դուք հաճախ եք հանդիպում առօրյա գործերի ընթացքում: Օրինակ՝ կինոժապավենը էկրանի վրա ցուցադրելիս ժապավենի կադրի յուրաքանչյուր կետին համադրվում է մի կետ էկրանի պատկերի վրա: Այդ դեպքում բոլոր հեռավորությունները մեծանում են նույնքան անգամ. այլապես պատկերը կաղավաղվեր, և, ասենք, մարդկանց դիմագծերը չէին պահպանվի:



Նկ. 60



ա)



բ)
Նկ. 61

Նկար 60-ում ցուցադրված է նման պատկերների կառուցման մի եղանակ: F պատկերի կամայական M կետին համադրվում է մի այնպիսի M_1 կետ, որը գտնվում է նախապես սևեռված O սկզբնակետով OM ճառագայթի վրա: Այստեղ $OM_1 = k \cdot OM$ *(նկ. 60-ում $k = 4$)*: Այդ համադրության արդյունքում ստացվում է մի F_1 պատկեր, որը նման է F պատկերին: Այդպիսի F և F_1 պատկերները կոչվում են *կենտրոնային նման պատկերներ*:

Նման քառանկյունների օրինակ են ցանկացած երկու քառակուսին *(նկ. 61(ա))*: Նման են նաև երկու այնպիսի ուղղանկյունները, որոնցից մեկի կից կողմերը համեմատական են մյուսի կից կողմերին *(նկ. 61(բ))*:

Կամայական տեսքով նման պատկերների օրինակ են միևնույն տեղանքի աշխարհագրական երկու քարտեզները, որոնք կատարված են տարբեր մասշտաբներով, ինչպես նաև նույն առարկայի տարբեր չափսի լուսանկարները:

Եռանկյունների նմանության մասին դուք գիտեք մեկ այլ սահմանում ևս: Կարելի է ապացուցել, որ այդ սահմանումը համարժեք է այստեղ տրված ընդհանուր սահմանմանը: Դա թույլ է տալիս եռանկյունների նմանության մասին խոսել՝ առանց հատուկ նշելու, թե սահմանումներից որ մեկը նկատի ունենք:

Հարցեր և խնդիրներ

188. Քառակուսիներից մեկի անկյունագիծը 4 անգամ մեծ է մյուսի անկյունագծից: Գտեք երկրորդ քառակուսու կողմը, եթե առաջին քառակուսու պարագիծը 100 սմ է:

189. Ուղղանկյուններից մեկի անկյունագծերի կազմած անկյունները հավասար են մյուս ուղղանկյան անկյունագծերի կազմած անկյուններին: Նմա՞ն են, արդյոք, այդ ուղղանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:

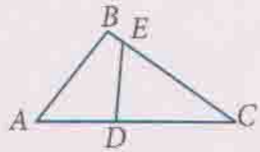
190. 60 սմ պարագծով $ABCD$ ուղղանկյունը նման է $A_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյանը, որի կից կողմերի երկարություններն են 4 սմ և 8 սմ: Գտեք $ABCD$ ուղղանկյան կողմերը:

191. Շեղանկյուններից մեկի անկյունագծերի երկարություններն են 12 սմ և 16 սմ: Երկրորդ շեղանկյան անկյունները հավասար են առաջին շեղանկյան անկյուններին, իսկ կողմը երկու անգամ փոքր է առաջինի կողմից: Գտեք այդ շեղանկյունների մակերեսները:

192. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում, $AB = 10$ սմ: Գտեք զուգահեռագծի պարագիծը, եթե $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{OC}$:

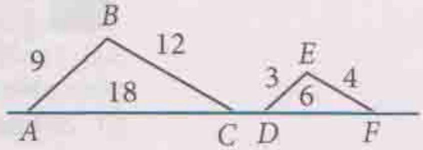
193. Երկու նման եռանկյունների մակերեսները հավասար են 16 սմ^2 և 25 սմ^2: Առաջին եռանկյան կողմերից մեկը 2 սմ է: Գտեք երկրորդ եռանկյան նմանակ կողմը:

194. Նման եռանկյունների երկու նմանակ կողմերը հավասար են 2 սմ և 5 սմ: Առաջին եռանկյան մակերեսը հավասար է 8 սմ^2: Գտեք երկրորդ եռանկյան մակերեսը:



Նկ. 62

195. Նկար 62–ում ABC և DEC եռանկյունները նման են, ընդ որում՝ DE–ն և AB–ն զուգահեռ չեն, $AD = 3$ սմ, $DC = 5$ սմ, $BC = 7$ սմ: Գտեք ABC և DEC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:



Նկ. 63

196. Ըստ նկար 63–ի տվյալների՝ ապացուցեք, որ ABC և DEF եռանկյունները նման են, և պարզեք AB և DE ուղիղների փոխադարձ դասավորությունը:

197. Եռանկյան կողմերը հավասար են 0,8 մ, 1,6 մ և 2 մ: Գտեք այդ եռանկյանը նման եռանկյան կողմերը, եթե դրա պարագիծը 5,5 մ է:

198. Մի եռանկյան պարագիծը կազմում է իրեն նման եռանկյան պարագծի $\frac{11}{13}$ մասը: Երկու նմանակ կողմերի տարբերությունը 1մ է: Գտեք այդ կողմերը:

199. BD–ն և B_1D_1–ը ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների միջնագծերն են, $\angle A = \angle A_1$, $\angle BDA = \angle B_1D_1A_1$: Ապացուցեք, որ BDC և $B_1D_1C_1$ եռանկյունները նման են:

200. ABC եռանկյան AC կողմը 12 սմ է: Միջնագծերի հատման կետով տարված է AC ուղղին զուգահեռ DE ուղիղը (D և E կետերը գտնվում են եռանկյան կողմերի վրա): Գտեք DE հատվածը:

201. O կետը $ABCD$ շեղանկյան անկյունագծերի հատման կետն է, E և F կետերը BC և DC կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ $EF = BO$ և $EF \perp AC$:

202. ABC և $A_1B_1C_1$ հավասարասրուն եռանկյունների հիմքերն են՝ $AC = 8$ սմ, $A_1C_1 = 12$ սմ, իսկ $\angle B = \angle B_1$: ABC եռանկյան BK միջնագիծը 3 սմ է: Գտեք $A_1B_1C_1$ եռանկյան կողմերը:

203. $ABCD$–ն ուղղանկյուն սեղան է ($\angle D = \angle C = 90°$), $BC = 3$ սմ, $CD = 6$ սմ, $BD \perp AB$: Գտեք այդ սեղանի մակերեսը:

204. Սեղանի անկյունագծերից մեկը մյուսի հետ հատման կետով տրոհվում է 3 սմ և 4 սմ հատվածների: Գտեք սեղանի մեծ հիմքը, եթե փոքր հիմքը 6 սմ է:

205. ABC եռանկյան մեջ տարված են AA_1 և BB_1 բարձրությունները (A_1–ը և B_1–ը բարձրությունների հիմքերն են): Ապացուցեք, որ A_1CB_1 եռանկյունը նման է ABC եռանկյանը:

206. Տրված է մի եռանկյուն՝ 6 սմ, 8 սմ, 9 սմ կողմերով: Երկրորդ եռանկյան կողմերից մեկը հավասար է 12 սմ: Ի՞նչ երկարություն ունեն դրա մյուս կողմերը, եթե հայտնի է, որ այդ եռանկյունները նման են: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

207. Հայտնի են $ABCD$ սեղանի հիմքերը. $AD = 8$ սմ, $BC = 2$ սմ: Հիմքերին զուգահեռ ուղիղը հատում է սեղանի սրունքները. AB–ն՝ M կետում, CD–ն՝ N կետում: Գտեք MN հատվածը, եթե $AM = 4$ սմ, $MB = 1$ սմ:

208. Ապացուցեք, որ եթե երկու եռանկյուններից յուրաքանչյուրը նման է երրորդ եռանկյանը, ապա այդ երկու եռանկյունները նման են:

§4 ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

29. Համեմատական հատվածները ուղղանկյուն եռանկյան մեջ

Խնդիր 1: ***Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը եռանկյունը տրոհում է երկու նման եռանկյունների, որոնցից յուրաքանչյուրը նման է տրված եռանկյանը:***

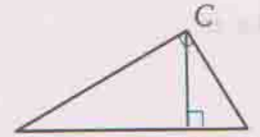
Լուծում: Դիցուք՝ ABC-ն C ուղիղ անկյունով եռանկյուն է, իսկ CD-ն նրա բարձրությունն է, որը ուղիղ անկյան գագաթից տարված է AB ներքնաձիգին *(նկ. 64)*: Ապացուցենք, որ $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, $\Delta ACD \sim \Delta CBD$:

ABC և ACD եռանկյունները նման են՝ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի ($\angle A$-ն ընդհանուր է, $\angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$): Ճիշտ նույն կերպ նման են նաև ABC և CBD եռանկյունները ($\angle B$-ն ընդհանուր է, և $\angle ACB = \angle BDC = 90^\circ$): Ուստի՝ $\angle A = \angle BCD$: Վերջապես՝ ACD և CBD եռանկյունները նույնպես նման են՝ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի (այդ եռանկյունների մեջ D գագաթով անկյուններն ուղիղ են, և $\angle A = \angle BCD$): *Ապացուցումն ավարտված է:*

Սահմանում: ***XY հատվածը կոչվում է AB և CD հատվածների համեմատական միջին (կամ՝ երկրաչափական միջին), եթե*** $XY = \sqrt{AB \cdot CD}$:

Ապացուցենք հետևյալ պնդումները:

1^0. ***Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը համեմատական միջին է այն երկու հատվածների, որոնց տրոհվում է ներքնաձիգը այդ բարձրության հետ հատվելիս:***



Նկ. 64

Իսկապես, $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ *(տե՛ս նկ. 64)*, ուստի՝ $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{DB}$:

Հետևաբար՝ $CD^2 = AD \cdot DB$, այսինքն՝ $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$:

2^0. ***Ուղղանկյուն եռանկյան էջը համեմատական միջին է ներքնաձիգի և նրա այն հատվածի, որը գտնվում է տվյալ էջի և ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրության միջև:***

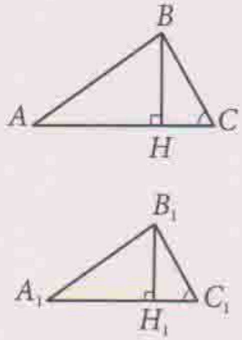
Իսկապես, $\Delta ADC \sim \Delta ACD$ *(տե՛ս նկ. 64)*, ուստի՝ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$:

Հետևաբար՝ $AC^2 = AB \cdot AD$, այսինքն՝ $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$:

30. Եռանկյան կիսորդի հատկությունը

Նախ վերհիշենք *մեկական հավասար անկյուն ունեցող երկու եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին թեորեմը*, որ ապացուցել ենք 8–րդ դասարանում: Այն ձևակերպվում է հետևյալ կերպ. *եթե եռանկյուններից մեկի անկյունը հավասար է մյուսի անկյանը, ապա այդ երկու եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են՝ ինչպես նրանց հավասար անկյուն կազմող կողմերի արտադրյալները:*

Այսինքն՝ եթե ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների մեջ $\angle A = \angle A_1$, ապա $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}$ (մեկ անգամ ևս ապացուցեք այդ պնդումը՝ օգտագործելով նկար 65–ում պատկերված ABH և $A_1B_1H_1$ ուղղանկյուն եռանկյունների նմանությունը):

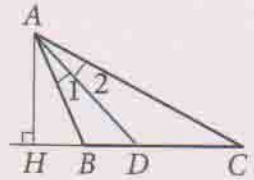


Նկ. 65

Այժմ ուսումնասիրենք եռանկյան կիսորդի մի կարևոր հատկություն:

Թեորեմ: ***Եռանկյան անկյան կիսորդը հանդիպակաց կողմը տրոհում է երկու հատվածի, որոնք համեմատական են կից կողմերին:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ AD–ն ABC եռանկյան կիսորդն է: Ապացուցենք, որ $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$ *(նկ. 66):*



Նկ. 66

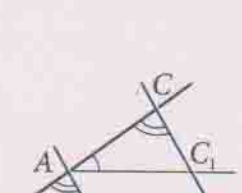
ABD և ACD եռանկյուններն ունեն ընդհանուր բարձրություն՝ AH–ը: Ուստի՝ $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC}$: Մյուս կողմից՝ այդ նույն եռանկյուններն ունեն մեկական հավասար անկյուններ ($\angle 1 = \angle 2$): Ուստի՝

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB\cdot AD}{AC\cdot AD}=\frac{AB}{AC}:$$

Մակերեսների հարաբերության այդ երկու հավասարությունից ստացվում է. $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$, կամ $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$:

Թեորեմն ապացուցված է:

31. Երկու ուղղի՝ մի քանի զուգահեռ ուղիղներով հատումից առաջացած հատվածների համեմատականությունը



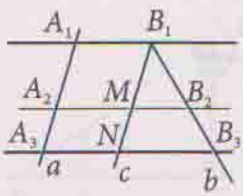
Նկ. 67

Խնդիր 2: ***O անկյան կողմերը հատվել են AB և CD զուգահեռ ուղիղներով: Ապացուցել, որ OA և AC հատվածները համեմատական են OB և BD հատվածներին*** *(նկ. 67):*

Լուծում։ A կետով տանենք AC_1 ուղիղը՝ զուգահեռ BD ուղղին (C_1-ը այդ ուղղի և CD ուղղի հատման կետն է)։ Դիտենք OAB և ACC_1 եռանկյունները։ Դրանք, ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի, նման եռանկյուններ են ($\angle O = \angle CAC_1$, $\angle OAB = \angle C$)։ Հետևաբար՝ $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$։ Բայց $AC_1 = BD$ (պարզաբանեք, թե ինչու), ուրեմն՝ $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել։

Այժմ դիտարկենք երկու ուղիղ՝ a-ն և b-ն, որոնց հատում են մի քանի զուգահեռ ուղիղներ ($A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$)։

Ապացուցենք, որ a ուղղի վրա անջատված A_1A_2 և A_2A_3 հատվածները համեմատական են b ուղղի վրա անջատված համապատասխան հատվածներին՝ B_1B_2-ին և B_2B_3-ին *(նկ. 68)։* Նախ նկատենք, որ եթե $a \parallel b$, ապա $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$, որտեղից հետևում է, որ պահանջվող համեմատականությունը տեղի ունի, այսինքն՝ $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$։



Նկ. 68

Ենթադրենք, որ a և b ուղիղները զուգահեռ չեն։ B_1 կետով տանենք a ուղղին զուգահեռ c ուղիղը։ Այն հատում է A_2B_2 ուղիղը՝ M կետում, A_3B_3 ուղիղը՝ N կետում։ Կառուցումից հետևում է, որ $A_1A_2 = B_1M$ և $A_2A_3 = MN$։ Բայց, ըստ խնդիր 2-ի, $\frac{B_1M}{B_1B_2} = \frac{MN}{B_2B_3}$։ Հետևաբար ստացվում է՝ $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$։

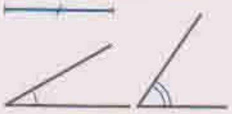
Այսինքն՝ *եթե երկու ուղիղներ հատվում են մի քանի զուգահեռ ուղիղներով, ապա ուղիղներից մեկի վրա անջատվում են հատվածներ, որոնք համեմատական են մյուս ուղղի վրա անջատված համապատասխան հատվածներին։*

Հատվածների համեմատականության մասին ապացուցված այս պնդումը հայտնի է որպես *Թալեսի ընդհանրացված թեորեմ։* Այս թեորեմի մասնավոր դեպքն է Թալեսի՝ ձեզ հայտնի թեորեմը, որը վերաբերում է միայն անջատված հատվածների միմյանց հավասար լինելու դեպքին։

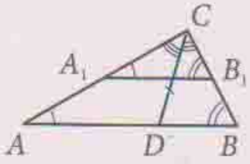
32. Եռանկյունների նմանության գործնական կիրառություններ

ա) Կառուցման խնդիրներ

Եռանկյունների կառուցման շատ խնդիրներ լուծելիս կիրառվում է, այսպես կոչված, *նմանության մեթոդը։* Դա խնդիր լուծելու եղանակ է, երբ որոշ տվյալների հիման վրա սկզբում



ա)



բ)
Նկ. 69

կառուցվում է որոնելի եռանկյանը նման մի եռանկյուն, իսկ այնուհետև, օգտագործելով մյուս տվյալները, կառուցում են որոնելի եռանկյունը:

Դիտարկենք օրինակ:

Խնդիր: *Կառուցել եռանկյուն՝ տրված երկու անկյունով և երրորդ անկյան կիսորդով:*

Լուծում: 69(ա) նկարում պատկերված են տրված երկու անկյունը և տրված հատվածը: Պահանջվում է կառուցել եռանկյուն, որի երկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար լինեն տրված երկու անկյուններին, և երրորդ անկյան գագաթով տարված կիսորդը հավասար լինի տրված հատվածին:

Նախ կառուցենք որոնելի եռանկյանը նման մի որևէ եռանկյուն: Դրա համար գծենք մի կամայական A_1B_1 հատված և կառուցենք A_1B_1C եռանկյուն, որի A_1 և B_1 անկյունները համապատասխանաբար հավասար են տրված անկյուններին *(նկ. 69(բ))*:

Այնուհետև կառուցենք C անկյան կիսորդը և նրա վրա տեղադրենք տրվածին հավասար CD հատվածը: D կետով տանենք A_1B_1 ուղղին զուգահեռ ուղիղ: Այն կհատի C անկյան կողմերը ինչ-որ A և B կետերում *(նկ. 69(բ))*: Ստացված ABC եռանկյունը որոնելին է:

Իրոք, քանի որ $AB \parallel A_1B_1$, ապա $\angle A = \angle A_1$ և $\angle B = \angle B_1$, այսինքն՝ կառուցված ABC եռանկյան երկու անկյունները հավասար են տրված անկյուններին: Իսկ ըստ կառուցման՝ այդ ABC եռանկյան C գագաթով տարված կիսորդը հավասար է տրված հատվածին: Այսպիսով՝ ABC եռանկյունը բավարարում է տրված բոլոր պայմաններին:

Ակնհայտ է, որ խնդիրը կունենա լուծում, եթե տրված երկու անկյան գումարը փոքր է 180°-ից: Քանի որ A_1B_1 հատվածը կարելի է ընտրել կամայական ձևով, ապա գոյություն ունեն խնդրի պայմաններին բավարարող անվերջ շատ եռանկյուններ: Սակայն բոլոր այդ եռանկյունները իրար հավասար են (պարզաբանեք, թե ինչու), այսինքն՝ խնդիրն ունի միակ լուծում:

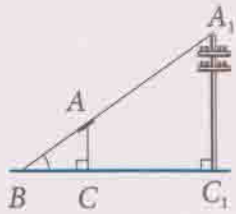
բ) Չափողական աշխատանքներ տեղանքում

Նման եռանկյունների հատկությունների հիման վրա կարելի է տեղանքում կատարել բազմազան չափողական աշխատանքներ: Այստեղ դիտարկենք երկու խնդիր. ինչպես որոշել առարկայի բարձրությունը և ինչպես որոշել տրված կետից անմատչելի կետի հեռավորությունը:

Առարկայի բարձրության որոշումը: Ենթադրենք մեզ անհրաժեշտ է որոշել որևէ առարկայի, ասենք՝ հեռախոսասյան բարձրությունը (նկար 70-ում դա A_1C_1-ն է): Դրա համար հեռախոսասյունից որոշ հեռավորության վրա տեղադրենք AC ձողը, որի A ծայրին կցված է պտտաձող: Պտտաձողն ուղղենք սյան վերին A_1 ծայրակետին, ինչպես ցուցադրված է նկարում: Գետնի վրա նշենք այն B կետը, որում A_1A ուղիղը հատվում է գետնի մակերևույթին: A_1C_1B և ACB եռանկյունները նման են՝ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի ($\angle B$-ն ընդհանուր է, $\angle C_1 = \angle C = 90^\circ$): Եռանկյունների նմանությունից հետևում է՝

$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BC_1}{BC}$, որտեղից՝ $A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC}$:

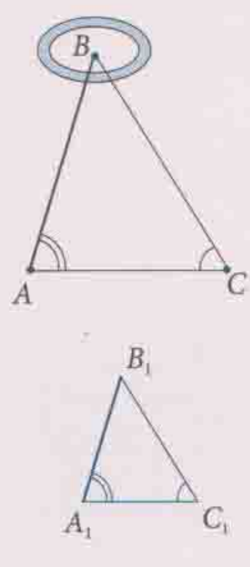
Չափելով BC_1 և BC հեռավորությունները և իմանալով AC ձողի երկարությունը՝ ըստ ստացված բանաձևի՝ որոշում ենք A_1C_1 սյան բարձրությունը: Օրինակ՝ եթե $BC_1 = 6{,}3$ մ, $BC = 2{,}1$ մ, $AC = 1{,}7$ մ, ապա $A_1C_1 = \frac{1{,}7 \cdot 6{,}3}{2{,}1} = 5{,}1$ մ: Հետաքրքիր է այն փաստը, որ եգիպտական բուրգերի բարձրությունը չափելու համար հենց այսպիսի եղանակ է առաջարկել հին հունական գիտնական Թալեսը, որի անունը ձեզ հայտնի է իր նշանավոր թեորեմով: Ընդ որում՝ ձողը (AC–ն) նա տեղադրել է այնպես, որ B կետում համընկնեն այդ ձողի և բուրգի ստվերների ծայրակետերը: Այսինքն՝ ըստ նկար 70–ի նշանակումների՝ BC–ն ձողի ստվերի երկարությունն է, իսկ BC_1–ը՝ բուրգի ստվերի:



Նկ. 70

Անմատչելի կետի հեռավորության որոշումը

Ենթադրենք՝ մեզ անհրաժեշտ է որոշել A կետից մինչև անմատչելի B կետը եղած հեռավորությունը *(նկ. 71)*: Դրա համար տեղանքում ընտրում ենք մի C կետ, ձողանշում ենք AC հատվածը և չափում նրա երկարությունը: Այնուհետև չափիչ սարքերի միջոցով չափում ենք անկյուններ A–ն և C–ն: Թղթի վրա գծագրում ենք մի $A_1B_1C_1$ եռանկյուն, որի $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, և չափում ենք այդ եռանկյան A_1B_1 և A_1C_1 կողմերը: Քանի որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են, ապա $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$: Որտեղից՝ $AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1}$: Տեղադրելով այս բանաձևի մեջ AC, A_1B_1 և A_1C_1 հայտնի տվյալները՝ ստանում ենք AB–ն:



Նկ. 71

Հաշվումները ավելի պարզ դարձնելու նպատակով $A_1B_1C_1$ եռանկյունը կառուցելիս A_1C_1 կողմի համար ընտրում ենք հարմար երկարություն: Օրինակ՝ եթե $AC = 130$ մ, ապա վերցնում ենք $A_1C_1 = 130$ մմ: Այս դեպքում՝ $AB = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot A_1B_1 = 1000 \cdot A_1B_1$: Ուրեմն՝ չափելով A_1B_1–ը՝ արտահայտված միլիմետրերով, մենք միանգամից ստանում ենք AB հեռավորությունը՝ արտահայտված մետրերով: Տվյալ դեպքում ընտրել ենք $A_1C_1 : AC = 1 : 1000$ հարաբերությունը: Կախված դիտարկվող հեռավորությունից՝ կարելի է ընտրել նաև այլ հարաբերություններ, ասենք՝ 1 : 10000 (1 մմ–ին՝ 10 մ), կամ՝ 1 : 1000000 (1մմ–ին՝ 1կմ) և այլն: Օրինակ՝ դիցուք՝ $AC = 130$ մ, $\angle A = 73°$, $\angle C = 58°$ *(տես նկ. 71)*: Թղթի վրա կառուցում ենք $A_1B_1C_1$ եռանկյունն այնպես, որ $\angle A_1 = 73°$, $\angle C_1 = 58°$, $A_1C_1 = 130$ մմ: Չափում ենք A_1B հատվածը: Այն հավասար է, ասենք, 153 մմ, ուրեմն՝ որոնելի հեռավորությունը 153 մ է:

209–211 խնդիրների պայմաններում C ուղիղ անկյունով և CH բարձրությունով ABC ուղղանկյուն եռանկյան տարրերի համար օգտագործված են հետևյալ նշանակումները. $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, $CH = h$, $AH = b_c$, $BH = a_c$:

209. Գտեք՝ ա) h–ը, a–ն և b–ն, եթե $b_c = 25$, $a_c = 16$, բ) h–ը, a–ն և b–ն, եթե $b_c = 36$, $a_c = 64$, գ) a–ն, c–ն և a_c–ն, եթե $b = 12$, $b_c = 6$, դ) b–ն, c–ն և b_c–ն, եթե $a = 8$, $a_c = 4$, ե) h–ը, b–ն, a_c–ն և b_c–ն, եթե $a = 6$, $c = 9$:

210. a_c–ն և b_c–ն արտահայտեք a–ով, b–ով և c–ով:

211. Ապացուցեք, որ՝ ա) $h = \dfrac{ab}{c}$, բ) $\dfrac{a^2}{a_c} = \dfrac{b^2}{b_c}$:

212. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը հարաբերում են, ինչպես 3 : 4, իսկ ներքնաձիգը հավասար է 50 մմ: Գտեք այն հատվածները, որոնց տրոհվում է ներքնաձիգը ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունով:

213. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը ներքնաձիգը տրոհում է երկու հատվածի, որոնցից մեկը 11 սմ–ով մեծ է մյուսից: Գտեք ներքնաձիգը, եթե եռանկյան էջերը հարաբերում են, ինչպես 6 : 5:

214. 5 սմ, 12 սմ և 13 սմ կողմեր ունեցող եռանկյան մեծ կողմին տարված է բարձրություն, որն այդ կողմը տրոհում է երկու հատվածների: Գտեք այդ հատվածները:

215. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը հարաբերում են, ինչպես 3 : 7, իսկ ներքնաձիգին տարված բարձրությունը հավասար է 42 սմ: Գտեք ներքնաձիգի հատվածները:

216. Գտեք ուղղանկյուն եռանկյան էջերի հարաբերությունը, եթե ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը և բարձրությունը հարաբերում են, ինչպես 13 : 12:

217. BD հատվածը ABC եռանկյան կիսորդն է: ա) Գտեք AB–ն, եթե $BC = 9$ սմ, $AD = 7{,}5$ սմ, $DC = 4{,}5$ սմ: բ) Գտեք DC–ն, եթե $AB = 30$ սմ, $AD = 20$ սմ, $BD = 16$ սմ և $\angle BDC = \angle C$:

218. AD հատվածը ABC եռանկյան կիսորդն է: Գտեք BD–ն և DC–ն, եթե $AB = 14$ սմ, $BC = 20$ սմ, $AC = 21$ սմ:

219. ABC եռանկյան AD կիսորդը BC կողմը տրոհում է CD և BD հատվածների, որոնք համապատասխանաբար հավասար են 4,5 սմ և 13,5 սմ: Գտեք AB–ն և AC–ն, եթե ABC եռանկյան պարագիծը 42 սմ է:

220. MNK եռանկյանը ներգծված է $MDEF$ շեղանկյունը այնպես, որ D, E և F գագաթները գտնվում են համապատասխանաբար MN, NK և MK կողմերի վրա: Գտեք NE և EK հատվածները, եթե $MN = 7$ սմ, $NK = 6$ սմ, $MK = 5$ սմ:

221. Տրված է եռանկյան 9 սմ և 6 սմ երկարություն ունեցող կողմերով կազմված անկյան կիսորդը: Եռանկյան երրորդ կողմը այդ կիսորդի հետ հատման կետով տրոհվում է հատվածների, որոնցից մեկը հավասար է տրված կողմերից մեկին: Գտեք երրորդ կողմը:

222. D կետը գտնվում է ABC եռանկյան BC կողմի վրա: Պարզեք, թե AD հատվածը կիսու՞մ է, արդյոք, A անկյունը, եթե՝ ա) $AB = 12$ սմ, $AC = 15$ սմ, $BD = 8$ սմ, $DC = 10$ սմ, բ) $AB = 12$մ, $AC = 56$մ և $BD : DC = 14 : 3$, գ) $AB = \frac{5}{11}AC$, $BD = 2$մ, $DC = 4{,}5$մ, դ) $AB = 6$մ, $AC = 28$մ, $BD = \frac{3}{17}BC$:

223. Տրված են ABC եռանկյան կողմերը՝ a–ն, b–ն և c–ն: BD–ն B անկյան կիսորդն է: O կետը BD–ի և C անկյան կիսորդի հատման կետն է: Որոշեք $DO : OB$ հարաբերությունը:

224. ABC եռանկյան մեջ $AB = 15$ սմ և $AC = 10$ սմ: AD–ն A անկյան կիսորդն է: D կետից AB կողմին տարված է զուգահեռ ուղիղ, որը E կետում հատում է AC կողմը: Որոշեք AE, EC և DE հատվածները:

225. ABC հավասարասրուն եռանկյան կողմերն են՝ $AC = b$, $BA = BC = a$: AN–ը և CM–ը A և C անկյունների կիսորդներն են: Գտեք MN–ը:

226. A անկյան կողմերը հատվում են BC և DE զուգահեռ ուղիղներով, ընդ որում՝ B և D կետերը գտնվում են անկյան կողմերից մեկի, իսկ C և E կետերը՝ մյուսի վրա: Գտեք՝ ա) AC–ն, եթե $CE = 10$ սմ, $AD = 22$ սմ, $BD = 8$ սմ, բ) BD–ն և DE–ն, եթե $AB = 10$ սմ, $AC = 8$ սմ, $BC = 4$ սմ, $CE = 4$ սմ, գ) BC–ն, եթե $AB : BD = 2 : 1$ և $DE = 12$ սմ:

227. ABC եռանկյան AD միջնագծի M կետով և B գագաթով տարված է ուղիղ, որը AC կողմը հատում է K կետում: Գտեք $\frac{AK}{KC}$ հարաբերությունը, եթե՝ ա) $AD = 2 \cdot AM$, բ) $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$:

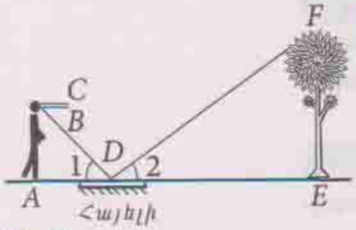
228. $ABCD$ սեղանի AB և CD սրունքները շարունակված են մինչև M կետում հատվելը: Գտեք՝ ա) CM հատվածը, եթե $AB = 1$ մ, $CD = 15$ դմ և $BM = 8$ դմ, բ) BM հատվածը, եթե $AB = 1{,}2$ մ և $CD : CM = 2 : 3$, գ) CD հատվածը, եթե $AB : BM = 17 : 9$ և $CD – CM = 1{,}6$ մ:

229. B անկյան մի կողմի վրա վերցված հատվածներն են BA–ն և BD–ն, իսկ մյուս կողմի վրա վերցված հատվածները՝ BC–ն և BE–ն: Պարզեք, թե զուգահե՞ռ են, արդյոք, AC և DE ուղիղները, եթե՝ ա) $BA : AD = 3 : 4$, $BC = 1{,}2$ մ և $BE = 2{,}8$ մ, բ) $BD : AD = 11 : 8{,}5$ և $BC = \frac{5}{17}CE$, գ) $BA = \frac{7}{13}BD$, $BC = 2{,}8$ մ և $CE = 2$ մ:

230. Սեղանի հիմքերն են 1,8 մ և 1,2 մ, իսկ սրունքները, որոնց երկարություններն են 1,5 մ և 1,2 մ, շարունակված են մինչև հատվելը: Պարզել, թե որքան է շարունակված սրունքներից յուրաքանչյուրը:

231. Նկար 70–ում պատկերված A_1C_1 սյան բարձրությունը որոշելու համար օգտագործվել է $AC = 1{,}7$ մ երկարությամբ ձող: Ինչի՞ է հավասար սյան բարձրությունը, եթե $BC_1 = 6{,}3$ մ, իսկ $BC = 3{,}4$ մ:

232. Ծառի ստվերի երկարությունը հավասար է 10,2 մ, իսկ 1,7 մ հասակ ունեցող մարդու ստվերի երկարությունը՝ 2,5 մ: Գտեք ծառի բարձրությունը:

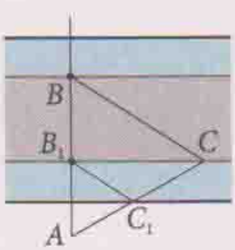


Նկ. 72

233. Ծառի բարձրությունը որոշելու համար կարելի է օգտագործել հայելին այնպես, ինչպես ցուցադրված է նկար 72–ում: Լույսի FD ճառագայթը, անդրադառնալով D կետում, ընկնում է դիտողի աչքին (B կետում): Որոշեք ծառի բարձրությունը, եթե $AC = 165$ սմ, $BC = 12$ սմ, $AD = 120$ սմ, $DE = 4{,}8$ մ, $\angle 1 = \angle 2$:

234. Ուղեփակոցի կարճ բազուկի երկարությունը 0,75մ է, իսկ երկար բազուկինը՝ 3,75 մ: Սկզբնական հորիզոնական դիրքից ինչքա՞ն կբարձրանա մեծ բազուկի ծայրը, եթե կարճ բազուկի ծայրը իջնի 0,5 մ–ով: Կատարեք գծագիր:

235. Տեղանքում A կետից անմատչելի B կետի հեռավորությունը որոշելու համար ընտրեցին մի C կետ, չափեցին AC հատվածը և A ու C անկյունները: Այնուհետև թղթի վրա պատկերեցին ABC եռանկյանը նման $A_1B_1C_1$ եռանկյուն: Որքա՞ն է AB հեռավորությունը, եթե $AC = 42$ մ, $A_1C_1 = 6{,}3$ սմ, $A_1B_1 = 7{,}2$ սմ:

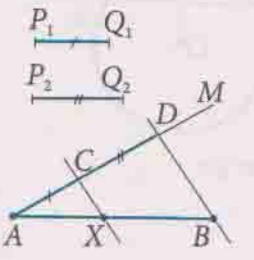


Նկ. 73

236. Նկար 73–ում ցույց է տրված, թե ինչպես կարելի է որոշել գետի BB_1 լայնությունը՝ դիտարկելով երկու՝ ABC և AB_1C_1 նման եռանկյունները: Որոշեք BB_1–ը, եթե $AC = 100$ մ, $AC_1 = 32$ մ, $AB_1 = 34$ մ:

237. Տրված AB հատվածը տրոհել AX և XB երկու հատվածների, որոնք համեմատական են տրված P_1Q_1 և P_2Q_2 հատվածներին:

Լուծում: Տանենք AB ուղղի վրա չգտնվող որևէ AM ճառագայթ: Այդ ճառագայթի վրա հաջորդաբար տեղադրենք P_1Q_1 և P_2Q_2 հատվածներին հավասար AC և CD հատվածները *(նկ. 74)*: Այնուհետև տանենք DB ուղիղը, իսկ ապա՝ DB–ին զուգահեռ և C կետով անցնող ուղիղը: Այն AB ուղիղը կհատի X կետում, և հենց AX և XB հատվածները կլինեն որոնելին (ըստ Թալեսի ընդհանրացված թեորեմի):



Նկ. 74

238. Գծեք AB հատված և այն տրոհեք հետևյալ հարաբերությամբ. ա) $2 : 5$, բ) $3 : 7$, գ) $4 : 3$:

239. Կառուցեք եռանկյուն՝ տրված երկու անկյուններով և դրանցից փոքրի գագաթով տարված կիսորդով:

240. Կառուցեք եռանկյուն՝ տրված երկու անկյուններով և երրորդ անկյան գագաթից տարված բարձրությունով:

241. Կառուցեք ABC եռանկյունը՝ տրված A անկյունով և AM միջնագծով, եթե հայտնի է, որ $AB : AC = 2 : 3$:

242. Կառուցեք ABC եռանկյունը՝ տրված A անկյունով և BC կողմով, եթե հայտնի է, որ $AB : AC = 2 : 1$:

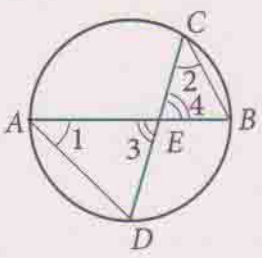
243. Կառուցեք ուղղանկյուն եռանկյունը՝ ներքնաձիգով և էջերի հարաբերությունով:

§5 ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ՝ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՀԵՏ ՀԱՏՈՒՄԻՑ ԱՌԱՋԱՑԱԾ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

33. Հատվող լարերի հատկությունը

Թեորեմ: ***Եթե շրջանագծի երկու լարեր հատվում են, ապա մի լարի հատվածների արտադրյալը հավասար է մյուս լարի հատվածների արտադրյալին:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ AB և CD լարերը հատվում են E կետում *(նկ. 75)*: Ապացուցենք, որ $AE \cdot EB = CE \cdot ED$:



Նկ. 75

Դիտարկենք ADE և CBE եռանկյունները: Այդ եռանկյուններում անկյուններ 1–ը և 2–ը հավասար են, քանի որ ներգծյալ անկյուն են և հենվում են նույն BD աղեղի վրա, իսկ անկյուններ 3–ը և 4–ը հավասար են՝ որպես հակադիր անկյուններ: Ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի՝ $\Delta ADE \sim \Delta CBE$:

Այստեղից հետևում է, որ $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{EB}$, կամ՝ $AE \cdot EB = CE \cdot ED$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1°. ***Եթե շրջանագծի ներսում վերցրած որևէ կետով տարված են ցանկացած թվով լարեր, ապա յուրաքանչյուր լարի հատվածների արտադրյալը հաստատուն է այդ բոլոր լարերի համար:***

Հետևանք 2°. ***Շրջանագծի վրա վերցված կետից տրամագծին տարված ուղղահայացը[1] հավասար է տրամագծի՝ այդ ուղղահայացի հետ հատումից առաջացած երկու հատվածների համեմատական միջինին*** (պարզաբանեք, թե ինչու):

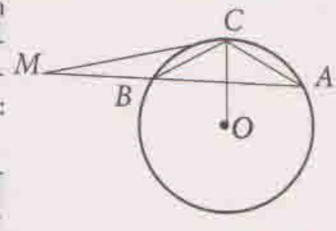
34. Շրջանագծի հատողի և շոշափողի հատկությունը

Թեորեմ: ***Եթե շրջանագծից դուրս վերցված կետից տարված են նրան որևէ հատող և շոշափող, ապա հատողի և նրա արտաքին մասի արտադրյալը հավասար է շոշափողի քառակուսուն*** (ընդունվում է, որ հատողը սահմանափակվում է երկրորդ հատման կետով, իսկ շոշափողը՝ շոշափման կետով):

Ապացուցում: Դիցուք՝ MC–ն O կենտրոնով շրջանագծի շոշափող է, MA–ն՝ հատող, իսկ MB–ն հատողի արտաքին մասն է: Ապացուցենք, որ $MA \cdot MB = MC^2$ *(նկ. 76)*: Դիտարկենք MAC և

1 «Կետից տրամագծին տարված ուղղահայաց» ասելով՝ նկատի ունենք կետից տրամագիծն ընդգրկող ուղղին տարված ուղղահայացը: Նշենք, որ այդ ուղղահայացի հիմքը գտնվում է տրամագծի վրա:

MCB եռանկյունները: $\angle M$–ը ընդհանուր է այդ եռանկյունների համար: $\angle MCB$–ն չափվում է BC աղեղի կեսով՝ որպես շոշափողով և լարով կազմված անկյուն: Բայց BC աղեղի կեսով է չափվում նաև BAC անկյունը՝ որպես ներգծյալ անկյուն: Հետևաբար՝ $\angle MCB = \angle BAC$, այսինքն՝ $\angle MAC = \angle MCB$:



Նկ. 76

Այսպիսով՝ $\Delta MAC \sim \Delta MCB$՝ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի: Ուրեմն՝ $\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC}$, որտեղից՝ $MB \cdot MA = MC^2$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: Եթե շրջանից դուրս վերցրած կետից տարված են այդ շրջանագծին հատողներ, ապա յուրաքանչյուր հատողի և նրա արտաքին մասի արտադրյալը հաստատուն է այդ բոլոր հատողների համար (այդ հաստատունը հավասար է տվյալ կետից շրջանագծին տարված շոշափողի քառակուսուն):

Հարցեր և խնդիրներ

244. Շրջանագծի որևէ կետից տրամագծին իջեցված է ուղղահայաց: Գտեք նրա երկարությունը, եթե տրամագծի հատվածները հավասար են՝ ա) 12 սմ և 3 սմ, բ) 16 սմ և 9 սմ, գ) 2 մ և 5 դմ:

245. Տրամագծի որևէ կետից տարված է նրան ուղղահայաց մինչև շրջանագծի հետ հատվելը: Գտեք այդ ուղղահայացի երկարությունը, եթե տրամագիծը հավասար է 40 սմ, իսկ ուղղահայացի հիմքի հեռավորությունը տրամագծի մի ծայրից հավասար է 8 սմ:

246. AB տրամագիծը տրոհված է երկու հատվածի՝ $AC = 8$ դմ և $CB = 5$ մ: C կետից տարված է տրամագծին ուղղահայաց՝ CD–ն: Որոշեք D կետի դիրքը շրջանագծի նկատմամբ, եթե CD–ն հավասար է՝ ա) 15 դմ, բ) 2 մ, գ) 23 դմ:

247. Երկու համակենտրոն շրջանագծերի շառավիղների տարբերությունը (օղակի հաստատունը) հավասար է 8 դմ: Մեծ շրջանագծի այն լարը, որը շոշափում է փոքր շրջանագիծը, հավասար է 4 մ: Գտեք շրջանագծերի շառավիղները:

248. Շրջանագծի երկու լարեր հատվում են: Մի լարի հատվածները հավասար են 24 սմ և 14 սմ, իսկ մյուս լարի հատվածներից մեկը՝ 28 սմ: Գտեք երկրորդ լարի երկարությունը:

249. AB և CD հատվածները հատվում են M կետում այնպես, որ $MA = 7$ սմ, $MB = 21$ սմ, $MC = 3$ սմ և $MD = 16$ սմ: A, B, C և D կետերը գտնվու՞մ են, արդյոք, միևնույն շրջանագծի վրա:

250. Երկու իրար հատող լարերից մեկը տրոհված է 48 մ և 3 մ հատվածների, իսկ մյուսը՝ կիսվում է: Որոշեք երկրորդ լարի երկարությունը:

251. Երկու իրար հատող լարերից մեկը տրոհված է 12 մ և 18 մ հատվածների, իսկ երկրորդը՝ 3 : 8 հարաբերությամբ: Որոշեք երկրորդ լարի երկարությունը:

252. Իրար հատող երկու լարերից առաջինը 32 սմ է, իսկ երկրորդ լարի հատվածներն են 12 սմ և 16 սմ: Որոշեք առաջին լարի հատվածները:

253. Մի կետից շրջանագծին տարված են հատող և շոշափող: Որոշել շոշափողի երկարությունը, եթե հատողի արտաքին և ներքին մասերի երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են՝ ա) 4 սմ և 5 սմ, բ) 2,25 դմ և 1,75 դմ, գ) 1 մ և 2 մ:

254. Շոշափողը 20 սմ է, իսկ նույն կետից տարված և շրջանագծի կենտրոնով անցնող հատողը՝ 50 սմ: Գտեք շրջանագծի շառավիղը:

255. Շրջանագծի հատողն իր արտաքին մասից մեծ է $2\frac{1}{4}$ անգամ: Հատողը նույն կետից տարված շոշափողից քանի՞ անգամ է մեծ:

256. Դիցուք՝ AB–ն շոշափող է, AD–ն՝ նույն շրջանագծի հատող, որի արտաքին մասը AC–ն է: Որոշեք՝ ա) CD–ն, եթե $AB = 2$ սմ և $AD = 4$ սմ, բ) AD–ն, եթե $AC : CD = 4 : 5$ և $AB = 12$ սմ, գ) AB–ն, եթե $AB = CD$ և $AC = a$:

257. Մի կետից շրջանագծին տարված շոշափողն ու հատողը համապատասխանաբար հավասար են 20 սմ և 40 սմ, իսկ հատողի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից՝ 8 սմ: Գտեք շրջանագծի շառավիղը:

258. Մի կետից շրջանագծին տարված են հատող և շոշափող: Որոշեք շոշափողի երկարությունը, եթե նա հատողի արտաքին մասից 5 սմ–ով մեծ է, իսկ ներքին մասից՝ նույնքանով փոքր:

259. Մի կետից նույն շրջանագծին տարված են երկու հատող՝ որոնց երկարություններն են 15 սմ և 25 սմ: Գտեք նրանց արտաքին մասերը, եթե հայտնի է, որ դրանցից մեկը 2 սմ–ով մեծ է մյուսից:

260. Որքա՞ն հեռու կարելի է տեսնել գետնից 4 կմ բարձրության վրա գտնվող թռչող օդապարիկից (երկրագնդի շառավիղը ընդունենք 6370 կմ):

261. Որոշեք շրջանագծի կենտրոնի և այն կետի հեռավորությունը, որից շրջանագծին տարված շոշափողն ու հատողը համապատասխանաբար հավասար են 4 սմ և 8 սմ, իսկ հատողի հեռավորությունը կենտրոնից 12 սմ է:

262. Մի կետից շրջանագծին տարված են երկու հատող, որոնց արտաքին մասերը հավասար են: Ապացուցեք, որ շրջանագծի կենտրոնը հավասարահեռ է այդ հատողներից:

ԳԼՈՒԽ IX-Ի ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

1. Ի՞նչն է կոչվում երկու հատվածների հարաբերություն:

2. Ո՞ր դեպքում են ասում, որ AB և CD հատվածները համեմատական են A_1B_1 և C_1D_1 հատվածներին:

3. Սահմանեք նման եռանկյունները:

4. Բացատրեք, թե ինչ է նմանության գործակիցը:

5. Վերհիշեք և ապացուցեք հավասար անկյուն ունեցող եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին թեորեմը:

6. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը:

7. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշը:

8. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյունների նմանության երրորդ հայտանիշը:

9. Ձևակերպեք և երկու եղանակով ապացուցեք եռանկյան միջին գծի մասին թեորեմը:

10. Ապացուցեք, որ եռանկյան միջնագծերը հատման կետով տրոհվում են 2 : 1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

11. Ձևակերպեք և ապացուցեք պնդումը նման եռանկյունների պարագծերի հարաբերության մասին:

12. Ձևակերպեք և ապացուցեք պնդումներ նման եռանկյունների՝ ա) բարձրությունների, բ) միջնագծերի, գ) կիսորդների հարաբերության մասին:

13. Բացատրեք, թե որ պատկերներն են կոչվում նման: Նկարագրեք կենտրոնային նման պատկերների օրինակներ:

14. Ձևակերպեք և ապացուցեք պնդում այն մասին, որ ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը եռանկյունը տրոհում է երկու նման եռանկյունների:

15. Սահմանեք երկու հատվածների համեմատական միջինի հասկացությունը, բերեք օրինակներ:
16. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ եռանկյան կիսորդի հատկության մասին:
17. Նկարագրեք, թե ինչպես կարելի է տրված հատվածը տրոհել տրված համեմատականությամբ հատվածների:
18. Բերեք նմանության մեթոդով կառուցման խնդրի լուծման օրինակ:
19. Նկարագրեք, թե տեղանքում ինչպես են որոշում առարկայի բարձրությունը և անմատչելի կետի հեռավորությունը:
20. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ հատվող լարերի մասին:
21. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ նույն կետից շրջանագծին տարված շոշափողի և հատողի մասին:
22. Ապացուցեք, որ նույն կետից շրջանագծին տարված հատողների և նրանց արտաքին մասերի համեմատականությունը հաստատուն արտադրյալով համեմատականություն է:

Լրացուցիչ խնդիրներ

263. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են, $AB = 6$ սմ, $BC = 9$ սմ, $CA = 10$ սմ: $A_1B_1C_1$ եռանկյան ամենամեծ կողմը 7,5 սմ է: Գտեք $A_1B_1C_1$ եռանկյան երկու մյուս կողմերը:

264. ABC եռանկյան AB կողմին զուգահեռ ուղիղը AC կողմը տրոհում է $2 : 7$ հարաբերությամբ՝ հաշված A գագաթից: Գտեք հատումից առաջացած եռանկյան կողմերը, եթե $AB = 10$ սմ, $BC = 18$ սմ, $CA = 21{,}6$ սմ:

265. Ապացուցեք, որ ABC եռանկյան AM միջնագիծը կիսում է BC կողմին զուգահեռ յուրաքանչյուր հատվածը, որի ծայրակետերը գտնվում են AB և AC կողմերի վրա:

266. Ապացուցեք, որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են, եթե՝ ա) $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BM}{B_1M_1}$, որտեղ BM–ը և B_1M_1–ը եռանկյունների միջնագծերն են, բ) $\angle A = \angle A_1$, $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BH}{B_1H_1}$, որտեղ BH–ը և B_1H_1–ը ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների բարձրություններն են:

267. ABC եռանկյան AD միջնագծի վրա գտնվող M կետով և B գագաթով անցնող ուղիղը K կետում հատում է AC կողմը: Գտեք $\frac{AK}{KC}$ հարաբերությունը, եթե՝ ա) M–ը AD հատվածի միջնակետն է, բ) $\frac{AM}{MD}=\frac{1}{2}$:

268. Ապացուցեք, որ եռանկյան գագաթները հավասարահեռ են որևէ միջին գիծն ընդգրկող ուղղից:

269. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյուններից մեկը նման է երկրորդին, իսկ այդ երկրորդ եռանկյունը նման է երրորդին, ապա առաջին և երրորդ եռանկյունները նման են:

270. Ապացուցեք, որ սեղանի անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը զուգահեռ է նրա հիմքերին և հավասար է դրանց կիսատարբերությանը:

271. ABC եռանկյան AA_1 և BB_1 միջնագծերը հատվում են O կետում: Գտեք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե ABO եռանկյան մակերեսը 96 սմ^2 է:

272. ABC եռանկյան AC կողմի վրա վերցված է այնպիսի M կետ, որ $\angle ABM = \angle ACB$: Հայտնի է, որ $AC = 9$ սմ, $MC = 8$ սմ: Գտեք AB կողմը:

273. Ապացուցեք, որ եթե քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները փոխուղղահայաց են, ապա այդ քառանկյան անկյունագծերը հավասար են:

274. $ABCD$ սեղանի AC անկյունագիծը սեղանը տրոհում է երկու նման եռանկյունների: Ապացուցեք, որ $AC^2 = a \cdot b$, որտեղ a –ն և b–ն սեղանի հիմքերն են:

275. MNP եռանկյան MD և NK կիսորդները հատվում են O կետում: Գտեք $OK : ON$ հարաբերությունը, եթե $MN = 5$ սմ, $NP = 3$ սմ, $MP = 7$ սմ:

276. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը հարաբերում է սրունքին՝ ինչպես 4 : 3, իսկ հիմքին տարված բարձրությունը հավասար է 30 սմ: Գտեք այն հատվածները, որոնց տրոհվում է այդ բարձրությունը հիմքին առընթեր անկյան կիսորդով:

277. ABC եռանկյան BC կողմի վրա վերցված է D կետն այնպես, որ $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$: Ապացուցեք, որ AD–ն ABC եռանկյան կիսորդ է:

278. A ուղիղ անկյունով $ABCD$ սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: AB հիմքը հավասար է 6 սմ, իսկ AD սրունքը՝ 4 սմ: Գտեք DC–ն, DB–ն և CB–ն:

279*. Սեղանի սրունքների վրա ծայրակետեր ունեցող հատվածը զուգահեռ է հիմքերին և անցնում է անկյունագծերի հատման կետով: Գտեք այդ հատվածի երկարությունը, եթե սեղանի հիմքերը հավասար են a և b:

280. $ABCD$ զուգահեռագծի CD կողմի միջնակետը M կետն է, իսկ BC կողմի միջնակետը՝ N կետը: Ապացուցեք, որ AM և AN ուղիղները BD անկյունագիծը բաժանում են երեք հավասար մասերի:

281. ABC ($AB \neq AC$) եռանկյան BC կողմի միջնակետով տարված է A անկյան կիսորդին զուգահեռ ուղիղ, որը հատում է AB ուղիղը՝ D կետում, իսկ AC ուղիղը՝ E կետում: Ապացուցեք, որ $BD = CE$:

282. $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը հատվում են M կետում: Ապացուցեք, որ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, եթե $AM \cdot CM = BM \cdot DM$:

283. Շրջանագծից դուրս գտնվող A կետից տարված են երկու հատող, որոնք շրջանագիծը հատում են B_1 և C_1, B_2 և C_2 կետերում (B_1–ը գտնվում է A–ի և C_1–ի միջև, իսկ B_2–ը՝ A–ի և C_2–ի միջև): Ապացուցեք, որ՝ ա) AB_1C_2 և AB_2C_1 եռանկյունները նման են, բ) $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$:

284. Շրջանագծին տարված են երկու զուգահեռ շոշափողներ, և մի երրորդ շոշափող, որ հատում է զուգահեռ շոշափողները: Ապացուցեք, որ այդ շրջանագծի շառավիղը համեմատական միջին է երրորդ շոշափողի հատվածներին:

285. Եթե երկու շրջանագծեր ունեն արտաքին շոշափում, ապա նրանց ընդհանուր շոշափողի հատվածը համեմատական միջին է նրանց տրամագծերին: Ապացուցեք այդ:

286. $ABCD$ սեղանի BD փոքր անկյունագիծը ուղղահայաց է AD և BC հիմքերին: A և C սուր անկյունների գումարը $90°$ է: AD հիմքը հավասար է a–ի, BC–ն՝ b–ի: Որոշեք AB և CD կողմերը:

287. Մի կետից շրջանագծին տարված շոշափողն ու հատողը փոխուղղահայաց են: Շոշափողը հավասար է 12 մ, իսկ հատողի ներքին մասը՝ 10 մ: Գտեք շրջանագծի շառավիղը:

288. Մի կետից շրջանագծին տարված են երկու շոշափող: Որոշեք շոշափման կետերի հեռավորությունը միմյանցից, եթե շրջանագծի շառավիղը 7 սմ է, իսկ տվյալ կետի և կենտրոնի հեռավորությունը՝ 25 սմ:

289. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը հավասար են 3 սմ և 4 սմ: Ներքնաձիգի և փոքր էջի միջնակետերով անցնող շրջանագիծը շոշափում է մեծ էջը: Որոշեք շրջանագծի այն լարի երկարությունը, որն ընկած է ներքնաձիգն ընդգրկող ուղղի վրա:

290. ա) Շրջանագծի ներսում վերցված M կետով տարված են երեք լար: Հայտնի է, որ M կետը այդ լարերից երկուսի միջնակետն է: M կետում ի՞նչ հարաբերությամբ է տրոհվում երրորդ լարը:

բ) r շառավիղով շրջանագծի ներսում վերցված M կետի հեռավորությունը կենտրոնից d է: Գտեք M կետով անցնող կամայական լարի՝ այդ կետով տրոհված երկու հատվածների արտադրյալը:

291. Տրված է a երկարությամբ հատված: Կառուցեք հատված, որի երկարությունը լինի՝ ա) $\sqrt{2}a$, բ) $\sqrt{3}a$, գ) $\sqrt{6}a$:

292. Տրված է ABC եռանկյունը: Կառուցեք մի $A_1B_1C_1$ եռանկյուն, որը նման է ABC եռանկյանը, և մակերեսը կրկնակի անգամ մեծ է ABC եռանկյան մակերեսից:

293. Տրված է a և b երկարությամբ երկու հատված: Կառուցեք $\sqrt{ab}$ երկարությամբ հատվածը:

294. Տրված է երեք հատված, որոնց երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են a, b և c: Կառուցեք մի հատված, որի երկարությունը հավասար է $\frac{ab}{c}$:

295. Կառուցեք եռանկյունը, եթե տրված են՝ ա) նրա կողմերի միջնակետերը, բ) երկու կողմերի միջնակետերը և երրորդ կողմին տարված բարձրության հիմքը, գ) մի գագաթից տարված բարձրության հիմքը և մյուս գագաթից տարված միջնագծի ու բարձրության հիմքերը:

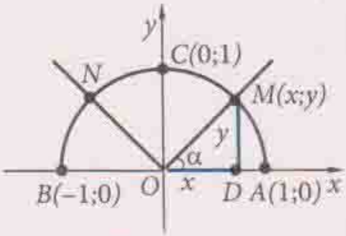
296. Կառուցեք եռանկյուն՝ տրված կողմով և մյուս երկու կողմերին տարված միջնագծերով:

297. Կառուցեք երկու հատված, որոնք հարաբերեն՝ ինչպես տրված երկու հատվածների քառակուսիները:

ԳԼՈՒԽ X
Եռանկյունաչափական առնչություններ

§1 ԱՆԿՅԱՆ ՍԻՆՈՒՍԸ, ԿՈՍԻՆՈՒՍԸ ԵՎ ՏԱՆԳԵՆՍԸ

35. Սինուս, կոսինուս, տանգենս



Նկ. 77

Ներմուծենք կոորդինատների Oxy ուղղանկյուն համակարգ և կառուցենք 1 շառավիղով կիսաշրջանագիծ, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, և որն ընդգրկված է առաջին և երկրորդ քառորդներում *(նկ. 77)*: Այն անվանենք *միավոր կիսաշրջանագիծ*: O կետից տանենք h ճառագայթը, որը $M(x,y)$ կետում հատում է միավոր կիսաշրջանագիծը: α տառով նշանակենք h ճառագայթի և աբսցիսների դրական կիսառանցքի կազմած անկյունը (եթե h ճառագայթը և աբսցիսների դրական կիսառանցքը համընկնում են, ապա կհամարենք, որ $\alpha = 0°$):

Եթե α անկյունը սուր է, ապա DOM ուղղանկյուն եռանկյունից *(տե՛ս նկ. 77)* ունենք.

$$\sin\alpha = \frac{MD}{OM},\ \cos\alpha = \frac{OD}{OM}:$$

Բայց՝ $OM = 1$, $MD = y$, $OD = x$:

Ուստի՝ $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$: (1)

Այսպիսով՝ α սուր անկյան սինուսը հավասար է M կետի y օրդինատին, իսկ α անկյան կոսինուսը՝ M կետի x աբսցիսին: Եթե α անկյունը ուղիղ է, բութ է, փռված է *(անկյուններ AOC-ն, AON-ը և AOB-ն՝ նկ. 77-ում)* կամ $\alpha = 0°$, ապա α անկյան սինուսը և կոսինուսը նույնպես կսահմանենք ըստ (1) բանաձևերի: Այսպիսով՝ **$0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ *միջակայքի ցանկացած α անկյան սինուս կոչվում է M կետի y օրդինատը, իսկ α անկյան կոսինուս՝ M կետի x աբսցիսը:*** Քանի որ միավոր կիսաշրջանագծերի կետերի (x, y) կոորդինատները սահմանափակված են $0 \leqslant y \leqslant 1$ և $-1 \leqslant x \leqslant 1$ միջակայքերում, ապա $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ միջակայքի յուրաքանչյուր α-ի համար տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները.

$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,\ \ -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1:$

Գտնենք սինուսի և կոսինուսի արժեքները $0°$, $90°$ և $180°$ անկյունների համար: Դրա համար դիտարկենք OA, OC և OB

ճառագայթները *(տես նկ. 77)*: Քանի որ A, C և B կետերն ունեն $A(1,0)$, $C(0,1)$, $B(-1,0)$ կոորդինատները, ապա՝

$$\sin 0^\circ = 0,\ \sin 90^\circ = 1,\ \sin 180^\circ = 0,$$

$$\cos 0^\circ = 1,\ \cos 90^\circ = 0,\ \cos 180^\circ = -1: \qquad (2)$$

α ***անկյան*** $(\alpha \neq 90^\circ)$ ***տանգենս կոչվում է*** $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ***հարաբերությունը,*** այսինքն՝ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$: (3)

$\alpha = 90^\circ$ դեպքում $\operatorname{tg}\alpha$–ն որոշված չէ, քանի որ $\cos 90^\circ = 0$, և (3) բանաձևի հայտարարը դառնում է զրո: Օգտագործելով (2) բանաձևը՝ գտնում ենք՝ $\operatorname{tg}0^\circ = 0$, $\operatorname{tg}180^\circ = 0$:

Օգտագործվում է նաև α անկյան տանգենսի հակադարձը, որը կոչվում է α անկյան *կոտանգենս*՝ նշանակվում է $\operatorname{ctg}\alpha$: Այսինքն՝ α անկյան $(\alpha \neq 0^\circ,\ 180^\circ)$ կոտանգենս կոչվում է $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ հարաբերությունը, այն է՝ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (4)

$\alpha = 0^\circ$ և $\alpha = 180^\circ$ դեպքում α անկյան կոտանգենսը որոշված չէ, քանի որ այդ դեպքում (4) բանաձևի հայտարարը դառնում է զրո: Քանի որ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, այսինքն՝ α անկյան կոտանգենսը անմիջապես արտահայտվում է α անկյան տանգենսով, α անկյան կոտանգենսի կիրառությունը փոխարինվում է տանգենսով:

36. Եռանկյունաչափական հիմնական նույնությունը

Նկար 77–ում պատկերված են կոորդինատների Oxy համակարգը և O կենտրոնով միավոր կիսաշրջանագիծը: Այդ կիսաշրջանագծի կամայական $M(x,y)$ կոորդինատներով կետի հեռավորությունը O կենտրոնից հավասար է 1–ի: Հաշվի առնելով (1) բանաձևը, այն է՝ $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, գրենք երկու՝ $O(0,0)$ և $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$ կետերի հեռավորության բանաձևը: Ստանում ենք

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad (5)$$

հավասարությունը, որը տեղի ունի $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ միջակայքի ցանկացած α անկյան համար: (5) հավասարությունը կոչվում է *եռանկյունաչափական հիմնական նույնություն*: 8–րդ դասարանում այդ նույնությունը մենք ապացուցել էինք միայն սուր անկյան համար:

Օգտագործելով եռանկյունաչափական հիմնական նույնությունը՝ կարող ենք α անկյան սինուսը արտահայտել նույն անկյան կոսինուսով կամ հակառակը: Օրինակ՝ գտնել $\sin\alpha$–ն, եթե $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

(5) բանաձևից գտնում ենք. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$:

Օգտագործելով (3) բանաձևը և եռանկյունաչափական հիմնական նույնությունը՝ α անկյան սինուսը կամ կոսինուսը կարող ենք արտահայտել նաև նույն անկյան տանգենսով կամ հակառակը: Օրինակ՝ գտնել cosα–ն, եթե $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$:

(5) բանաձևից ստանում ենք՝ $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, այսինքն՝ $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$: Ուրեմն՝ $1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, կամ $\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$: Այժմ, նկատի ունենալով, որ $\mathrm{tg}\alpha<0$, այսինքն՝ $90^\circ<\alpha<180^\circ$, ստանում ենք՝ $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$:

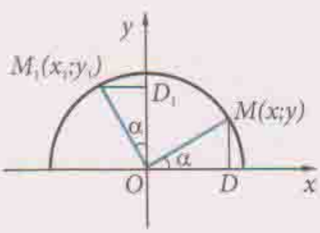
37. Բերման բանաձևեր

Երբեմն հարկ է լինում գտնել $90^\circ \pm \alpha$ կամ $180^\circ - \alpha$ տեսքի անկյունների սինուսը, կոսինուսը կամ տանգենսը՝ ունենալով α անկյան սինուսը, կոսինուսը կամ տանգենսը: Այդ դեպքում օգտագործվում են որոշ բանաձևեր, որոնք կոչվում են *բերման բանաձևեր:*

Մենք գիտենք, որ եթե ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյուններից մեկը հավասար է α, ապա մյուսը հավասար է $90^\circ - \alpha$: Բայց 90°–ը լրացնող երկու սուր անկյուններից մեկի սինուսը հավասար է մյուսի կոսինուսին: Այսինքն՝ եթե α–ն սուր անկյուն է, ապա՝

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ (6)

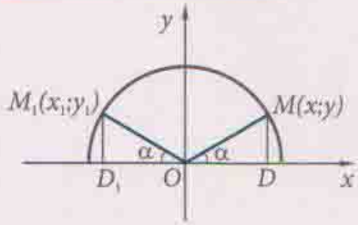
Այժմ ցույց տանք, որ $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$ (7)



Նկ. 78

Դիցուք՝ $\alpha = \angle MOD$ և $90^\circ + \alpha = \angle M_1OD$ (նկ. 78): Ունենք, որ $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, $x_1 = \cos(90^\circ + \alpha)$, $y_1 = \sin(90^\circ + \alpha)$: ODM և OD_1M_1 ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են՝ ըստ եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշի ($OM = OM_1$, $\angle MOD = \angle M_1OD_1$, $\angle D = \angle D_1 = 90^\circ$): Ուստի՝ $OD_1 = OD$ և $M_1D_1 = MD$: Բայց $OD = x$, $OD_1 = y_1$, $MD = y$, $M_1D_1 = -x_1$: Հետևաբար՝ $x = y_1$, $y = -x_1$, այսինքն՝ $\cos\alpha = \sin(90^\circ + \alpha)$, $\sin\alpha = -\cos(90^\circ + \alpha)$, որտեղից և ստացվում են (7) բանաձևերը:

Այժմ արտածենք բերման բանաձևը $180^\circ - \alpha$ տեսքի անկյան համար:



Նկ. 79

Դիցուք՝ $\alpha = \angle MOD$ և $180^\circ - \alpha = \angle M_1OD$ *(նկ. 79)*: Ունենք, որ $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, $x_1 = \cos(180^\circ - \alpha)$, $y_1 = \sin(180^\circ - \alpha)$: ODM և OD_1M_1 ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են (բացատրեք, թե ինչու): Ուստի՝ $MD = M_1D_1$ և $OD = OD_1$: Բայց $OD = x$, $OD_1 = -x_1$, $MD = y$ և $M_1D_1 = y_1$:

Հետևաբար՝ $x = -x_1$ և $y = y_1$, այսինքն՝

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ և $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$: (8)

Տանգենսի համար բերման բանաձևերն ստացվում են տվյալ անկյան սինուսի և կոսինուսի արժեքների միջոցով: Օրինակ՝

եթե $\alpha \neq 90^\circ$, ապա՝

$$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha,$$

եթե $\alpha \neq 0^\circ$, ապա՝

$$\mathrm{tg}\,(90^\circ + \alpha) = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\mathrm{ctg}\alpha:$$

38. Կետի կոորդինատների հաշվման բանաձևերը

Դիցուք տրված են կոորդինատների Oxy համակարգը և ոչ բացասական y օրդինատով կամայական $A(x;y)$ կետը *(նկ. 80)*: A կետի x և y կոորդինատներն արտահայտենք OA հատվածի a երկարության և OA ճառագայթի ու աբսցիսների Ox դրական կիսաառանցքի կազմած α անկյան միջոցով:

Նկ. 80

Դրա համար նշանակենք M տառով OA ճառագայթի և միավոր կիսաշրջանագծի հատման կետը: Ըստ (1) բանաձևի՝ M կետի կոորդինատներն են՝ $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$:

Այսինքն՝ $OM_1 = \cos\alpha$, $MM_1 = \sin\alpha$: Ox առանցքին A կետից տանենք AA_1 ուղղահայացը: Պարզ է, որ $OA = a$, $OA_1 = x$, $AA_1 = y$: OMM_1 և OAA_1 եռանկյունները նման են ($\angle O$-ն ընդհանուր է, $MM_1 \parallel AA_1$): Ուստի՝ $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{AA_1}{MM_1} = \dfrac{OA_1}{OM_1}$, այսինքն՝

$\dfrac{a}{1} = \dfrac{y}{\sin\alpha} = \dfrac{y}{\cos\alpha}$: Այստեղից ստանում ենք.

$x = a\cos\alpha$, $y = a\sin\alpha$: (9)

39*. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը

Մենք արդեն գիտենք գումարել վեկտորները և վեկտորը բազմապատկել թվով: Այժմ ներմուծենք վեկտորների հետ կատարվող մի նոր գործողություն՝ վեկտորների սկալյար բազմապատկումը:

Երկու վեկտորի սկալյար արտադրյալ կոչվում է նրանց երկարությունների և իրենցով կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալը:

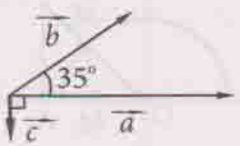
$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը նշանակվում է $\vec{a}\cdot\vec{b}$ կամ $\vec{a}\,\vec{b}$: Ըստ սահմանման՝

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}): \qquad (1)$$

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներն ուղղահայաց են, այսինքն՝ $\angle(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$, ապա $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=0$ և, ուրեմն՝ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$: Հակադարձը՝ եթե $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ և $\vec{a}$-ն ու $\vec{b}$-ն ոչ զրոյական վեկտոր են, ապա (1) հավասարությունից ստացվում է, որ $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=0$: Ուրեմն՝ $\angle(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$, այսինքն՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն ուղղահայաց են:

Այսպիսով՝ *երկու՝ ոչ զրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալը 0 է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորներն ուղղահայաց են:*

Ուշադրություն դարձրեք մի կարևոր հանգամանքի վրա: (1) հավասարության ձախ մասում գրված են բազմապատկվող վեկտորներ, մինչդեռ աջ մասում բազմապատկման արդյունքը թիվ է: Նկատենք, որ երկու՝ ոչ զրոյական վեկտորների արտադրյալը դրական (բացասական) թիվ է, եթե նրանց կազմած անկյունը փոքր է (մեծ է) 90°-ից:



$\vec{a}.\vec{b}>0,\ \vec{a}.\vec{c}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}<0$

Նկ. 81

Նկար 81-ում $\angle(\vec{a},\vec{b})=35^\circ$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=90^\circ$, $\angle(\vec{b},\vec{c})=125^\circ$: Ուրեմն՝ $\vec{a}\,\vec{b}>0$, $\vec{a}.\vec{c}=0$, $\vec{b}.\vec{c}<0$:

Վեկտորների սկալյար արտադրյալն օժտված է մի շարք հատկություններով, որոնք դուք կուսումնասիրեք հաջորդ դասարաններում:

Հարցեր և խնդիրներ

298. Պատասխանեք հարցերին. ա) Կարո՞ղ է, արդյոք, միավոր կիսաշրջանագծի կետի աբսցիսը ունենալ հետևյալ արժեքները՝ 0,3; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$; $-2{,}8$: բ) Կարո՞ղ է, արդյոք, միավոր կիսաշրջանագծի կետի օրդինատը ունենալ հետևյալ արժեքները՝ 0,6; $\frac{1}{7}$; $-0{,}3$; 7; 1,002 : Պատասխանը հիմնավորեք:

*Այս կետի բովանդակությունը պարտադիր ուսումնասիրման նյութ չէ:

299. Ստուգեք, որ $M_1(0,1)$, $M_2(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $M_3(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $M_4(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, $A(1,0)$, $B(-1,0)$ կետերն, իրոք, գտնվում են միավոր կիսաշրջանագծի վրա: Գրեք AOM_1, AOM_2, AOM_3, AOM_4, AOB անկյունների սինուսի, կոսինուսի և տանգենսի արժեքները:

300. Գտեք $\sin\alpha$-ն, եթե՝ ա) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, բ) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, գ) $\cos\alpha = -1$:

301. Գտեք $\cos\alpha$-ն, եթե՝ ա) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, բ) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, գ) $\sin\alpha = 0$:

302. Գտեք $tg\alpha$-ն, եթե՝ ա) $\cos\alpha = 1$, բ) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, գ) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ և $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, դ) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ և $90^\circ < \alpha < 180^\circ$:

303. Հաշվեք 120°, 135°, 150° անկյունների սինուսը, կոսինուսը և տանգենսը:

304. Կառուցեք $\angle A$-ն, եթե՝ ա) $\sin A = \frac{2}{3}$, բ) $\cos A = \frac{3}{4}$, գ) $\cos A = -\frac{2}{5}$:

305. Միավոր կիսաշրջանագիծը հատող OA ճառագայթի և աբսցիսների Ox դրական կիսաառանցքի կազմած անկյունը հավասար է α: Գտեք A կետի կոորդինատները, եթե՝ ա) $OA = 3$, $\alpha = 45^\circ$, բ) $OA = 1{,}5$, $\alpha = 90^\circ$, գ) $OA = 5$, $\alpha = 150^\circ$, դ) $OA = 1$, $\alpha = 180^\circ$, ե) $OA = 2$, $\alpha = 30^\circ$:

306. Գտեք OA ճառագայթի և Ox դրական կիսաառանցքի կազմած անկյունը, եթե A կետն ունի հետևյալ կոորդինատները. ա) $(2,2)$, բ) $(0,3)$, գ) $(-\sqrt{3},1)$, դ) $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$:

307. Ճշմարի՞տ է, արդյոք, որ եթե $\cos\alpha = \cos\beta$, ապա $\alpha = \beta$: Պատասխանը հիմնավորեք:

308. Ճշմարի՞տ է, արդյոք, որ եթե $\sin\alpha = \sin\beta$, ապա $\alpha = \beta$ կամ $\alpha = 180^\circ - \beta$: Պատասխանը հիմնավորեք:

309. Բաղդատեք $\sin\alpha$-ն և $\sin\beta$-ն, եթե՝
ա) $\alpha < \beta \leqslant 90^\circ$, բ) $90^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180^\circ$:

310. Բաղդատեք $\cos\alpha$-ն և $\cos\beta$-ն, եթե՝
ա) $\alpha < \beta \leqslant 90^\circ$, բ) $90^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180^\circ$:

311. Բաղդատեք $tg\alpha$-ն և $tg\beta$-ն, եթե՝
ա) $\alpha < \beta < 90^\circ$, բ) $90^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$:

312. Դասավորեք աճման կարգով.

ա) $\sin 36°$, $\sin 12°$, $\sin 172°$,

բ) $\cos 64°$, $\cos 34°$, $\cos 95°$,

գ) $\mathrm{tg}70°$, 1, $\mathrm{tg}30°$:

313. Սու՞ր, ո՞ւղի՞ղ, թե՞ բութ անկյուն է A-ն, եթե՝

ա) $\sin A > 0$, $\cos A > 0$,

բ) $\sin A > 0$, $\cos A = 0$,

գ) $\sin A > 0$, $\cos A < 0$,

դ) $\mathrm{tg}A > 0$,

ե) $\mathrm{tg}A < 0$:

314. Գտեք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, իսկ նրանց կազմած անկյունը հավասար է՝ ա) 45°, բ) 90°, գ) 135°:

315. Տարված է a կողմով ABC հավասարակողմ եռանկյան BD բարձրությունը: Գտեք հետևյալ վեկտորների սկալյար արտադրյալը. ա) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, բ) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$, գ) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, դ) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$:

316*. Տրված են $ABCD$ ուղղանկյան կից կողմերը՝ $AB = 1$ սմ և $AD = \sqrt{3}$ սմ: Տարված են ուղղանկյան անկյունագծերը, որոնք հատվում են O կետում: Գտեք վեկտորների սկալյար արտադրյալները. ա) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, բ) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$, գ) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, դ) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$:

§2 ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

40. Թեորեմ եռանկյան մակերեսի մասին

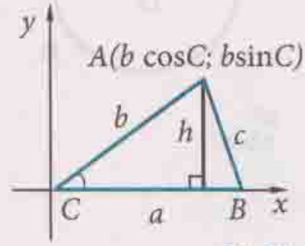
Թեորեմ: ***Եռանկյան մակերեսը հավասար է նրա երկու կողմերի և դրանցով կազմված անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին:***

Ապացույց: Դիցուք՝ ABC եռանկյան մեջ $BC = a$, $CA = b$, և S–ը այդ եռանկյան մակերեսն է: Ապացուցենք, որ՝

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C:$$

Ներմուծենք C սկզբնակետով կոորդինատային համակարգ այնպես, որ B կետը գտնվի Cx դրական կիսաառանցքի վրա, իսկ A կետն ունենա դրական օրդինատ *(նկ. 82)*: Տվյալ եռանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել $S = \frac{1}{2}ah$ բանաձևով, որտեղ h–ը եռանկյան բարձրությունն է: Բայց h–ը հավասար է A կետի օրդինատին, այսինքն՝ $h = b\sin C$: Հետևաբար՝ $S = \frac{1}{2}ab\sin C$:

Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 82

41. Սինուսների թեորեմը

Թեորեմ: ***Եռանկյան կողմերը համեմատական են հանդիպակաց անկյունների սինուսներին:***

Ապացույց: Դիցուք՝ ABC եռանկյան մեջ $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$: Ապացուցենք, որ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Ըստ եռանկյան մակերեսի մասին թեորեմի՝

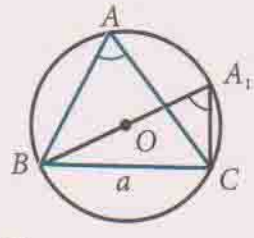
$$S = \frac{1}{2}ab\sin C, \; S = \frac{1}{2}bc\sin A, \; S = \frac{1}{2}ac\sin B:$$

Առաջին երկու հավասարությունից ստանում ենք՝

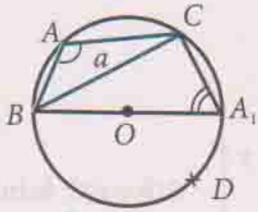
$\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A$, որտեղից՝ $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$: Ճիշտ նույն կերպ՝ երկրորդ և երրորդ հավասարություններից հետևում է $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$: Այսպիսով՝ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Պարզաբանում: Ապացուցենք, որ ***եռանկյան կողմի և հանդիպակաց անկյան սինուսի հարաբերությունը հավասար է եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի տրամագծին:***



ա)



բ)
Նկ. 83

Ապացույց: Դիցուք՝ R-ը ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղն է: Ապացուցենք, որ $\frac{BC}{\sin A} = 2R$ կամ $BC = 2R\sin A$:

Տանենք BA_1 տրամագիծը *(նկ. 83)* և դիտարկենք A_1BC եռանկյունը (A_1 և C կետերի համընկնելու դեպքը դիտարկեք ինքնուրույն): Այդ եռանկյան C անկյունը ուղիղ է, ուստի՝ $BC = BA_1\sin A_1$: Բայց $\sin A = \sin A_1$: Իսկապես, եթե A_1 կետն ընկած է BAC աղեղի վրա *(նկ. 83(ա))*, ապա $\angle A_1 = \angle A$, իսկ եթե ընկած է BDC աղեղի վրա *(նկ. 83(բ))*, ապա $\angle A_1 = 180^\circ - \angle A$: Եվ մեկ, և մյուս դեպքում $\sin A_1 = \sin A$: Հետևաբար՝ $BC = BA_1\sin A$, կամ՝ $BC = 2R\sin A$:

Այսպիսով՝ կամայական ABC եռանկյան համար, որի կողմերն են՝ $AB = c$, $BC = a$ և $CA = b$, տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

որտեղ R-ը արտագծյալ շրջանագծի շառավիղն է:

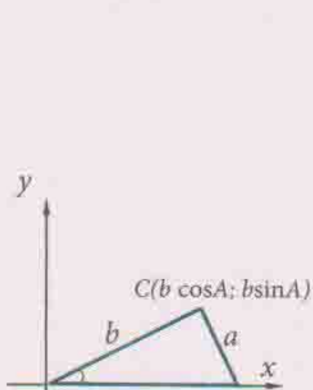
42. Կոսինուսների թեորեմը

Թեորեմ: ***Եռանկյան կողմի քառակուսին հավասար է մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարին՝ հանած այդ կողմերի և դրանց կազմած անկյան կոսինուսի կրկնապատիկը:***

Ապացույց: Դիցուք՝ ABC եռանկյան մեջ $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$: Ապացուցենք, որ, օրինակ՝

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A: \qquad (1)$$

Ներմուծենք A սկզբնակետով կոորդինատային համակարգ այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկար 84-ում: Այդ դեպքում B կետը կունենա $(c,0)$ կոորդինատներ, իսկ C կետը՝ $(b\cos A,\ b\sin A)$ կոորդինատներ: Ըստ երկու կետերի հեռավորության բանաձևի՝ ստանում ենք.



Նկ. 84

$BC^2 = a^2 = (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 A = b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A - 2bc\cos A + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Կոսինուսների թեորեմը երբեմն անվանում են *Պյութագորասի ընդհանրացված թեորեմ:* Այդպիսի անվանումը պայմանավորված է այն բանով, որ կոսինուսների թեորեմն իր մեջ բովանդակում է նաև Պյութագորասի թեորեմը՝ որպես մասնավոր դեպք: Իրոք, եթե ABC եռանկյան A անկյունը ուղիղ է, ապա $\cos A = \cos 90^\circ = 0$, և (1) բանաձևից ստացվում է $a^2 = b^2 + c^2$, այսինքն՝ ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին:

43. Եռանկյունների լուծումը

Եռանկյան լուծում կոչվում է նրա բոլոր վեց տարրերի (այն է՝ երեք կողմի և երեք անկյան) գտնելը՝ եռանկյունը որոշող որևէ երեք տրված տարրերի միջոցով: Դիտարկենք եռանկյունների լուծման երեք խնդիր: Այդ ընթացքում կօգտագործենք ABC եռանկյան կողմերի հետևյալ նշանակումը. $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$:

Խնդիր1: *Եռանկյան լուծումը՝ տրված երկու կողմով և նրանց կազմած անկյունով:*

Տրված են a–ն, b–ն, ∠C–ն: Գտնել c–ն, ∠A–ն, ∠B–ն:

Լուծում: 1. Ըստ կոսինուսների թեորեմի՝ գտնում ենք c–ն.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

2. Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ ստանում ենք.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

A անկյունը գտնում ենք աղյուսակով կամ հաշվարկիչով:

3. $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$:

Խնդիր 2: *Եռանկյան լուծումը՝ տրված կողմով և նրան առընթեր երկու անկյունով:*

Տրված են a–ն, ∠B–ն, ∠C–ն: Գտնել ∠A–ն, b–ն, c–ն:

Լուծում: 1. $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$:

2. Օգտվելով սինուսների թեորեմից՝ գտնում ենք b–ն և c–ն:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A},\ c = a\frac{\sin C}{\sin A}$$

Խնդիր 3: *Եռանկյան լուծումը՝ տրված երեք կողմով:*

Տրված են a–ն, b–ն, c–ն: Գտնել ∠A–ն, ∠B–ն, ∠C–ն:

Լուծում: 1. Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ ստանում ենք.

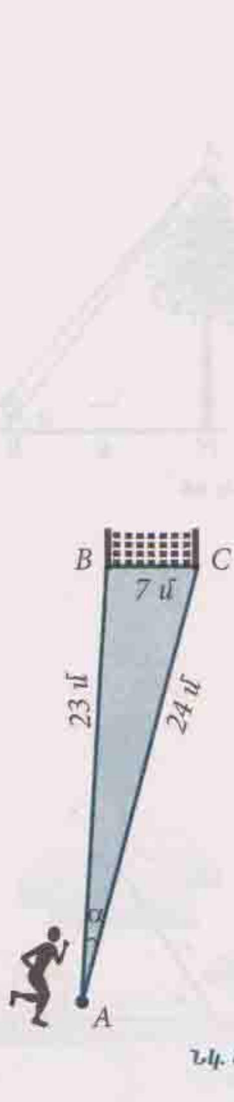
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

A անկյունը գտնում ենք աղյուսակով կամ հաշվարկիչով:

2. Նույն կերպ գտնում ենք նաև B անկյունը:

3. $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$:

Օրինակ: Ֆուտբոլի գնդակը գտնվում է ֆուտբոլի դաշտի A կետում՝ դարպասաձողերի B և C հիմքերից 23 մ և 24 մ հեռավորության վրա *(նկ. 85)*: Ֆուտբոլիստը գնդակն ուղարկում է դեպի դարպաս: Գտեք այն α անկյունը, որով գնդակը մտնում է դարպաս, եթե դարպասի լայնությունը 7 մ է:



Նկ. 85

Լուծում: Դիտենք ABC եռանկյունը, որի գագաթներն են A–ն՝ գնդակի գտնված կետը, B–ն և C–ն՝ դարպասաձողերի հիմքերը: Ըստ խնդրի տվյալների՝ $c = AB = 23$ մ, $b = AC = 24$ մ, $a = BC = 7$ մ: Այս տվյալները բավարար են ABC եռանկյունը լուծելու և α անկյունը գտնելու համար *(տե՛ս խնդիր 3–ը)*: Կոսինուսների թեորեմի օգնությամբ գտնում ենք cos$A$–ն ($\alpha = \angle A$).

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2 \cdot 24 \cdot 23}:$$

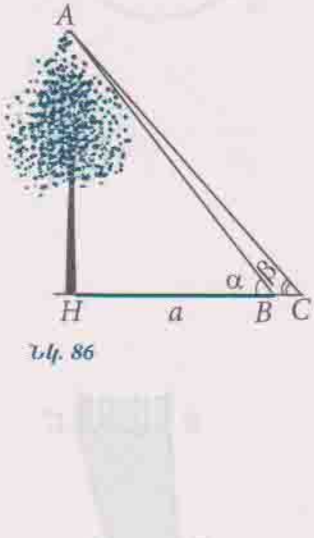
Կատարելով հաշվումները՝ աղյուսակի կամ հաշվարկիչի օգնությամբ գտնում ենք A անկյունը: Ստացվում է $\alpha \approx 16°57'$:

44. Չափողական աշխատանքներ

Եռանկյունաչափական բանաձևերը լայնորեն կիրառվում են տեղանքում զանազան չափողական աշխատանքներ կատարելիս:

ա) Առարկայի բարձրության չափումը

Ենթադրենք պահանջվում է որոշել ինչ–որ առարկայի AH բարձրությունը *(նկ. 86)*: Դրա համար առարկայի H հիմքից որոշակի a հեռավորության վրա նշենք մի B կետ և չափենք ABH անկյունը. $\angle ABH = \alpha$: Այդ տվյալներով AHB ուղղանկյուն եռանկյունից գտնում ենք առարկայի բարձրությունը՝ $AH = a$tgα: Եթե առարկայի հիմքը անմատչելի է, ապա կարելի է վարվել այսպես. առարկայի H հիմքով անցնող որևէ ուղղի վրա միմյանցից որոշակի a հեռավորության վրա նշում ենք երկու կետ՝ B–ն և C–ն, և չափում ենք ABH և ACB անկյունները. $\angle ABH = \alpha$ և $\angle ACB = \beta$ *(տե՛ս նկ. 86)*: Այս տվյալները բավարար են ABC եռանկյան բոլոր տարրերը, մասնավորապես՝ AB–ն որոշելու համար: Իրոք, $\angle ABH$–ը ABC եռանկյան արտաքին անկյունն է, ուստի՝ $\angle A = \alpha - \beta$: Օգտագործելով սինուսների թեորեմը՝ գտնում ենք AB կողմը.



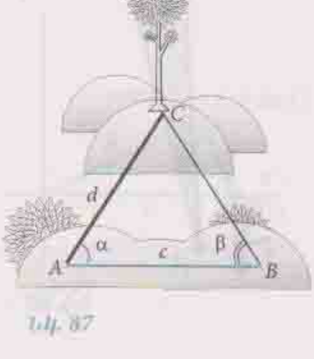
Նկ. 86

$$AB = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}:$$

ABH ուղղանկյուն եռանկյունից գտնում ենք առարկայի AH բարձրությունը. $AH = AB\sin\alpha$: Այսպիսով՝

$$AH = \frac{a \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}:$$

բ) Անմատչելի կետի հեռավորության որոշումը



Նկ. 87

Ենթադրենք պահանջվում է գտնել A կետից մինչև անմատչելի C կետը եղած d հեռավորությունը *(նկ. 87)*: Հիշենք, որ նման խնդիր մենք լուծել ենք եռանկյունների նմանության հայտանիշների միջոցով: Այժմ դիտարկենք խնդրի լուծման մեկ այլ եղանակ՝ օգտագործելով եռանկյունաչափական բանաձևերը:

Տեղանքում ընտրում ենք B կետ և չափում AB հատվածի c երկարությունը: Այնուհետև օգտագործելով անկյունաչափ սարք՝ չափում ենք A և B անկյունները. $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$: Այս տվյալները, այն է՝ c–ն, α–ն, β–ն, բավարար են ABC եռանկյունը լուծելու և $d = AC$ հեռավորությունը որոշելու համար:

Նախ գտնենք $\angle C$–ն և $\sin C$–ն.

$\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta$, $\sin C = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$: Այնուհետև, սինուսների թեորեմի օգնությամբ, գտնենք d–ն: Քանի որ $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$, $AC = d$, $AB = c$, $\angle B = \beta$, ապա $d = \dfrac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$:

Հարցեր և խնդիրներ

317. Գտեք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե՝ ա) $AB = 6\sqrt{8}$ սմ, $AC = 4$ սմ, $\angle A = 60^\circ$, բ) $BC = 3$ սմ, $AB = 18\sqrt{2}$ սմ, $\angle B = 45^\circ$, գ) $AC = 14$ սմ, $CB = 7$ սմ, $\angle C = 48^\circ$:

318. ABC եռանկյան մակերեսը 60 սմ^2 է: Գտեք AB կողմը, եթե $AC = 15$ սմ, $\angle A = 30^\circ$:

319. Գտեք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե՝ ա) $\angle A = \alpha$, իսկ B և C գագաթներից տարված բարձրությունները համապատասխանաբար հավասար են h_b և h_c, բ) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, իսկ B գագաթից տարված բարձրությունը հավասար է h:

320. Գտեք հավասարասրուն եռանկյան մակերեսը, եթե նրա սրունքը 2 սմ է, իսկ հիմքին առընթեր անկյունը՝ 15°:

321. ABC եռանկյան մեջ $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 6$ սմ, իսկ եռանկյան մակերեսը հավասար է $6\sqrt{3}$ սմ^2: Գտեք BC–ն:

322. ABC եռանկյան մեջ $AB = 3$ սմ, $BC = 4$ սմ: BD–ն եռանկյան կիսորդ է, և $\angle ABD = \alpha$: Գտեք ABD եռանկյան մակերեսը:

323. ABC եռանկյան մեջ $AC = 8$ սմ, $BC = 6$ սմ, $\angle C = \alpha$: AA_1–ը և BB_1–ը եռանկյան միջնագծերն են, որոնք հատվում են O կետում: Գտեք AOB_1 եռանկյան մակերեսը:

324. ABC եռանկյան մեջ AA_1–ը և CC_1–ը միջնագծեր են, որոնք հատվում են O կետում: $AA_1 = 9$ սմ, $CC_1 = 12$ սմ և $\angle AOC = 120^\circ$: Գտեք ABC եռանկյան մակերեսը:

325. Սինուսների և կոսինուսների թեորեմների օգնությամբ լուծեք ABC եռանկյունը, եթե.

ա) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $c = 14$,

բ) $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 75^\circ$, $b = 4{,}5$,

գ) $\angle A = 80^\circ$, $a = 16$, $b = 10$,

դ) $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $a = 24{,}6$,

ե) $\angle A = 60^\circ$, $a = 10$, $b = 7$,

զ) $a = 6{,}3$, $b = 6{,}3$, $\angle C = 54^\circ$,

է) $b = 32$, $c = 45$, $\angle A = 87^\circ$, ը) $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$,

թ) $a = 6$, $b = 7{,}3$, $c = 4{,}8$:

326. ABC եռանկյան մեջ $AC = 12$ սմ, $\angle A = 75^\circ$, $\angle C = 60^\circ$: Գտեք AB–ն և S_{ABC}–ն:

327. Գտեք ABC եռանկյան կողմերը, եթե $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, իսկ AD բարձրությունը հավասար է 3 մ:

328. Գտեք եռանկյան կիսորդները, եթե նրա կողմերից մեկը հավասար է a, իսկ այդ կողմին առընթեր անկյունները հավասար են α և β:

329. Պարզել, թե սուրանկյու՞ն, ուղղանկյու՞ն, թե՞ բութանկյուն է եռանկյունը, եթե նրա կողմերը հավասար են՝ ա) 5; 4 և 4, բ) 17; 8 և 15, գ) 9; 5 և 6:

330. Շրջանագծի մեջ տարված են E կետում հատվող AB և CD լարերը: Գտեք այդ լարերի կազմած սուր անկյունը, եթե $AB = 13$ սմ, $CE = 9$ սմ, $ED = 4$ սմ, իսկ B և D կետերի հեռավորությունը հավասար է $4\sqrt{3}$ սմ:

331. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 10^\circ$, $\angle C = 20^\circ$, $AC = 10$ սմ: Գտեք այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

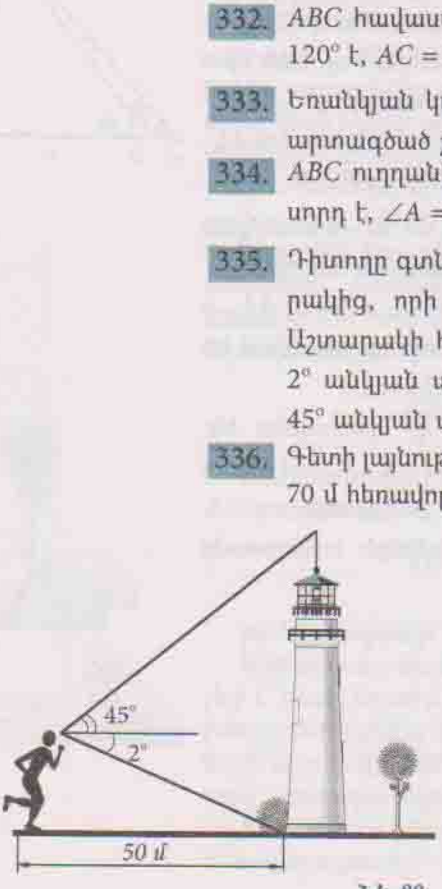
332. ABC հավասարասրուն եռանկյան B գագաթի անկյունը 120° է, $AC = 2\sqrt{21}$: Գտեք AM միջնագիծը:

333. Եռանկյան կողմերն են՝ 13, 14 և 15: Գտեք եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

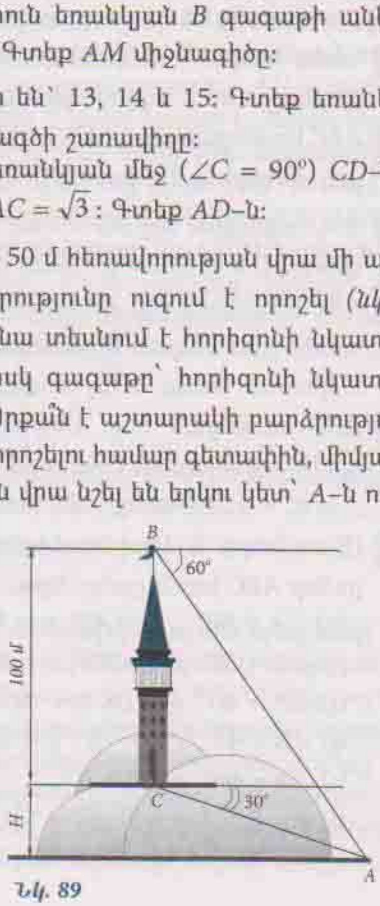
334. ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ ($\angle C = 90^\circ$) CD–ն կիսորդ է, $\angle A = 15^\circ$, $AC = \sqrt{3}$: Գտեք AD–ն:

335. Դիտողը գտնվում է 50 մ հեռավորության վրա մի աշտարակից, որի բարձրությունը ուզում է որոշել *(նկ. 88)*: Աշտարակի հիմքը նա տեսնում է հորիզոնի նկատմամբ 2° անկյան տակ, իսկ գագաթը՝ հորիզոնի նկատմամբ 45° անկյան տակ: Որքա՞ն է աշտարակի բարձրությունը:

336. Գետի լայնությունը որոշելու համար գետափին, միմյանցից 70 մ հեռավորության վրա նշել են երկու կետ՝ A–ն ու B–ն,



Նկ. 88



Նկ. 89

և չափել են CAB և ABC անկյունները, որտեղ C–ն մյուս ափին՝ գետի եզրին կից կանգնած ծառ է: Պարզվել է, որ $\angle CAB = 12°30'$, $\angle ABC = 72°42'$: Գտեք գետի լայնությունը:

337. Սարի գագաթին կա մի աշտարակ, որի բարձրությունը 100 մ է *(նկ. 89)*: Ստորոտում գտնվող ինչ–որ A առարկա դիտում են նախ աշտարակի B գագաթից, որտեղից այն երևում է հորիզոնի նկատմամբ $60°$ անկյան տակ, այնուհետև՝ աշտարակի C հիմքից, որտեղից այն երևում է $30°$ անկյան տակ: Գտեք սարի H բարձրությունը:

ԳԼՈՒԽ X-Ի ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

1. Վերհիշեք, թե որն է կոչվում ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան սինուս, կոսինուս, տանգենս, կոտանգենս:

2. Ապացուցեք, որ եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը հավասար է մյուս ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյանը, ապա այդ անկյունների սինուսները հավասար են, կոսինուսները հավասար են, տանգենսները հավասար են:

3. Ինչի՞ են հավասար սինուսի, կոսինուսի և տանգենսի արժեքները $30°$, $45°$, $60°$ անկյունների դեպքում: Բացատրեք, թե ինչպես են գտնում այդ արժեքները:

4. Գծեք կոորդինատների առանցքները և կառուցեք միավոր կիսաշրջանագիծը: Բացատրեք, թե ինչպես կարելի է ստուգել՝ տրված $M(a,b)$ կետը գտնվու՞մ է այդ կիսաշրջանագծի վրա, թե՞ ոչ:

5. Բացատրեք, թե ինչ են $0° < \alpha < 180°$ միջակայքի α անկյան սինուսը և կոսինուսը:

6. Ի՞նչն է կոչվում α անկյան տանգենս, և ի՞նչը՝ կոտանգենս: α–ի ո՞ր արժեքի համար տանգենսը որոշված չէ և ինչու՞:

7. Ապացուցեք եռանկյունաչափական հիմնական նույնությունը:

8. Գրեք բերման բանաձևերը:

9. Արտածեք այն բանաձևերը, որոնք ոչ բացասական օրդինատով A կետի կոորդինատներն արտահայտում են OA հատվածի երկարության և OA ճառագայթի ու Ox դրական կիսաառանցքի կազմած անկյան միջոցով:

10. Ի՞նչ է երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը: Ո՞ր դեպքում երկու ոչ զրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝ ա) հավասար է 0, բ) մեծ է 0–ից, գ) փոքր է 0–ից:

11. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյան մակերեսի մասին թեորեմը (եռանկյան մակերեսի հաշվումը ըստ երկու կողմի ու դրանց կազմած անկյան):

12. Ձևակերպեք և ապացուցեք սինուսների թեորեմը:

13. Ձևակերպեք և ապացուցեք կոսինուսների թեորեմը:

14. Ի՞նչ է նշանակում «եռանկյան լուծում» բառակապակցությունը: Ձևակերպեք եռանկյան լուծման երեք հիմնական խնդիրները և բացատրեք, թե ինչպես են դրանք լուծվում:

15. Բացատրեք, թե ինչպես են որոշում առարկայի բարձրությունը, որի հիմքը անմատչելի է:
16. Բացատրեք, թե ինչպես են որոշում անմատչելի կետի հեռավորությունը:

Լրացուցիչ խնդիրներ

338. ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ $AB = AC = b$, $\angle A = 30°$: Գտեք BE և AD բարձրությունները, ինչպես նաև AE, EC, BC հատվածները:

339. Գտեք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե՝ ա) $BC = 4{,}125$ մ, $\angle B = 44°$, $\angle C = 72°$, բ) $BC = 4100$ մ, $\angle A = 32°$, $\angle C = 120°$:

340. Օգտագործելով սինուսների թեորեմը՝ լուծեք ABC եռանկյունը, եթե՝ ա) $AB = 8$ սմ, $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, բ) $AB = 5$ սմ, $\angle B = 45°$, $\angle C = 60°$, գ) $AB = 3$ սմ, $BC = 3{,}3$ սմ, $\angle A = 48°30'$, դ) $AC = 10{,}4$ սմ, $BC = 5{,}2$ սմ, $\angle B = 62°48'$:

341. Օգտագործելով կոսինուսների թեորեմը՝ լուծեք ABC եռանկյունը, եթե՝ ա) $AB = 5$ սմ, $AC = 7{,}5$ սմ, $\angle A = 135°$, բ) $AB = 2\sqrt{2}$ դմ, $BC = 3$ դմ, $\angle B = 45°$, գ) $AC = 0{,}6$ մ, $BC = \frac{\sqrt{3}}{4}$ դմ, $\angle C = 150°$:

342. ABC եռանկյան AB կողմը 15 սմ է, իսկ AC կողմը՝ 10 սմ: Կարո՞ղ է, արդյոք, լինել $\sin B = \frac{3}{4}$:

343. Եռանկյան երկու կողմերը հավասար են 5 սմ և 6 սմ: Կարո՞ղ է, արդյոք, 5 սմ կողմի հանդիպակաց անկյունը լինել բութ:

344. ABC եռանկյանը ներգծած է շրջանագիծ, որի շառավիղը $2\sqrt{3}$ է, $\angle A = 80°$, $\angle C = 40°$: Գտեք AC-ն:

345. $ABCD$ զուգահեռագծի մեջ $AD = 2$, $\angle BAD = 60°$, $BE \perp AD$, $BE = 2\sqrt{3}$: Գտեք զուգահեռագծի մեծ անկյունագծի երկարությունը:

346. ABC եռանկյան AB կողմը 4 սմ է, իսկ BC-ն՝ 5 սմ: Եռանկյան մակերեսը $5\sqrt{3}$ սմ^2 է: Գտեք B գագաթից իջեցրած բարձրությունը, եթե $\cos B < 0$:

347. DEF եռանկյան մեջ $DE = 4{,}5$ դմ, $EF = 9{,}9$ դմ, $DF = 70$ սմ: Գտեք եռանկյան անկյունները:

348. Գտեք ABC եռանկյան AD կիսորդը, եթե $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$:

349. Ապացուցեք, որ $A(3,0)$, $B(1,5)$, $C(2,1)$ գագաթներով եռանկյունը բութանկյուն եռանկյուն է:

ԳԼՈՒԽ XI

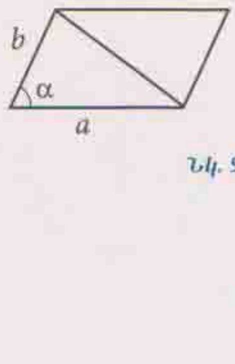
Երկրաչափական մեծությունների հաշվումներ

§1 ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ

45. Զուգահեռագծի մակերեսի հաշվման բանաձևը

Դիցուք՝ զուգահեռագծի կից կողմերն են a-ն և b-ն, իսկ նրանց կազմած անկյունը՝ α-ն: Ապացուցենք, ***որ զուգահեռագծի S մակերեսը հավասար է նրա կից կողմերի և դրանց կազմած անկյան սինուսի արտադրյալին, այսինքն՝*** $S = ab\sin\alpha$ (1)

Զուգահեռագիծը անկյունագծով տրոհվում է երկու հավասար եռանկյունների, որոնցից յուրաքանչյուրի մակերեսը որոշվում է $S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ բանաձևով *(նկ. 90)*:



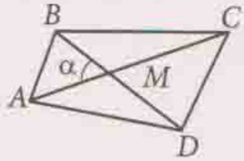
Նկ. 90

Հետևաբար՝ $S = 2S_\Delta = 2\cdot\frac{1}{2}ab\sin\alpha = ab\sin\alpha$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Պարզաբանում: Քանի որ զուգահեռագծի յուրաքանչյուր կողմին առընթեր անկյունների գումարը $180°$ է, և, ըստ բերման բանաձևի, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, ապա (1) բանաձևը ճիշտ է՝ անկախ այն բանից, թե α-ն նրա անկյուններից որն է:

46. Քառանկյան մակերեսի բանաձևը

Ապացուցենք, որ ***ուռուցիկ քառանկյան մակերեսը հավասար է նրա անկյունագծերի և դրանց կազմած անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին:***



Նկ. 91

Դիցուք՝ $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետը M-ն է, իսկ նրանց կազմած անկյունը՝ α-ն *(նկ. 91)*: Քառանկյունը անկյունագծերով տրոհվում է չորս եռանկյան: Օգտվենք մակերեսների հատկությունից, եռանկյան մակերեսի բանաձևից և այնուհետև կատարենք արտահայտության պարզեցում.

$$S = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMD} + S_{DMA} = \frac{1}{2}AM \cdot MB\sin\alpha + \frac{1}{2}BM \cdot$$

$$\cdot MC\sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}CM \cdot MD \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}DM \cdot MA \cdot \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha((AM \cdot MB + MB \cdot MC) + (CM \cdot MD + MD \cdot MA)) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha(BM \cdot AC + MD \cdot AC) = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\alpha:$$

Այսպիսով՝ եթե քառանկյան անկյունագծերը նշանակենք d_1 և d_2, նրանց կազմած անկյունը՝ α, ապա քառանկյան S մակերեսի համար ստանում ենք. $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$: (2)

Մասնավոր դեպքեր:

ա) Քանի որ ***շեղանկյան*** համար $\alpha = 90^\circ$, իսկ $\sin 90^\circ = 1$, ապա շեղանկյան մակերեսը հաշվվում է $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$ բանաձևով:

բ) Քանի որ ***ուղղանկյան*** անկյունագծերը հավասար են ($d_1 = d_2 = d$), ապա նրա մակերեսը հաշվվում է $S = \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha$ բանաձևով:

գ) Քանի որ ***քառակուսու*** անկյունագծերը հավասար են և ուղղահայաց ($\alpha = 90^\circ$ և $d_1 = d_2 = d$), ապա նրա մակերեսը հաշվվում է $S = \frac{1}{2}d^2$ բանաձևով:

47. Հերոնի բանաձևը

Դիցուք՝ a-ն, b-ն, c-ն ABC եռանկյան կողմերն են: Ապացուցենք, որ այդ եռանկյան S մակերեսը հաշվվում է $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ բանաձևով, որտեղ p-ն եռանկյան կիսապարագիծն է. $p = \frac{a+b+c}{2}$:

Ըստ եռանկյան մակերեսի մասին թեորեմի՝ $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, որտեղից $\sin C = \frac{2S}{ab}$: Ըստ կոսինուսների թեորեմի՝

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$, որտեղից` $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$: Այժմ օգտվելով $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ նույնությունից` ստանում ենք. $\frac{4S^2}{a^2b^2} + \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2} = 1$:

Կատարենք ձևափոխություններ.

$16S^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = ((a + b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2) = (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)$:

Նկատենք, որ $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $c + a - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$:

Ստանում ենք. $16S^2 = 2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)$:

Այսպիսով` $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$,

ուրեմն` $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$:

Այս բանաձևը հայտնի է հին հունական մաթեմատիկոս Հերոնի անունով (Հերոն Ալեքսանդրիացու ծննդյան և մահվան տարեթվերը հայտնի չեն, նա ապրել է, հավանաբար, մ.թ.ա. 1–ին կամ 2–րդ դարերում):

Մասնավոր դեպք. a կողմով հավասարակողմ եռանկյան մակերեսն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}:$$

48. Եռանկյան մակերեսի, կողմերի և արտագծյալ շրջանագծի շառավիղի կապը

Դիցուք` $ABC$ եռանկյան կողմերն են $a$–ն, $b$–ն, $c$–ն, մակերեսը` S–ը, իսկ արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը` R–ը: Ապացուցենք, որ $S = \frac{abc}{4R}$: (3)

Իսկապես, ունենք $S = \frac{1}{2}ab\sin C$: Ըստ սինուսների թեորեմի` $\frac{c}{\sin C} = 2R$, որտեղից $\sin C = \frac{c}{2R}$: Տեղադրելով մակերեսի բանաձևի մեջ` ստանում ենք` $S = \frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

(3) բանաձևը թույլ է տալիս գտնել տրված կողմերով եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը:

Խնդիր: Գտնել եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը, եթե տրված են նրա կողմերը` $a = 4$, $b = 7$, $c = 9$:

Լուծում: Նախ հաշվենք այդ եռանկյան մակերեսը՝ օգտվելով Հերոնի բանաձևից՝ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, որտեղ $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$: Ստանում ենք. $p=\frac{1}{2}(4+7+9)=10$, և $S=\sqrt{10\cdot6\cdot3\cdot1}=6\sqrt{5}$:

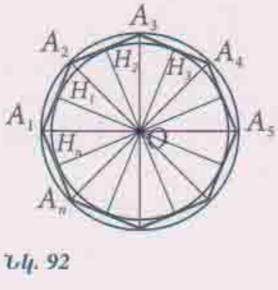
Այժմ, օգտվելով (3) բանաձևից, ստանում ենք.

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{4\cdot7\cdot9}{6\sqrt{5}}=\frac{42}{\sqrt{5}}=8{,}4\sqrt{5}\ :$$

49. Կանոնավոր բազմանկյան մակերեսի, նրա կողմերի և ներգծյալ շրջանագծի շառավիղի հաշվման բանաձևեր

Դիցուք՝ S–ը կանոնավոր n–անկյան մակերեսն է, a_n–ը՝ նրա կողմը, P–ն՝ պարագիծը, իսկ r–ը և R–ը համապատասխանաբար ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծերի շառավիղներն են: Նախ ապացուցենք, որ

$$S=\frac{1}{2}Pr\ : \tag{1}$$



Նկ. 92

Իրոք, բազմանկյան կենտրոնը միացնենք նրա գագաթներին *(նկ. 92)*: Այդ դեպքում բազմանկյունը տրոհվում է n հատ հավասար եռանկյունների, որոնցից յուրաքանչյուրի մակերեսը հավասար է $\frac{1}{2}a_nr$: Հետևաբար՝ $S=n\cdot\frac{1}{2}a_nr=\frac{1}{2}(na_n)r=\frac{1}{2}Pr$:

Այժմ արտածենք հետևյալ բանաձևերը.

$$a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \tag{2}$$

$$r=R\cos\frac{180^\circ}{n}\ : \tag{3}$$

Այս բանաձևերի արտածման համար օգտվենք նկար 92–ից: A_1H_1O ուղղանկյուն եռանկյան մեջ՝

$$\angle A_1=\frac{\alpha_n}{2}=\frac{n-2}{2n}\cdot180^\circ=90^\circ-\frac{180^\circ}{n}$$

Հետևաբար՝ $a_n=2A_1H_1=2R\cos\left(90^\circ-\frac{180^\circ}{n}\right)=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$,

իսկ $r=OH_1=R\sin\left(90^\circ-\frac{180^\circ}{n}\right)=R\cos\frac{180^\circ}{n}$:

(2) բանաձևի մեջ ընդունելով $n = 3, 4, 6$, ստանում ենք արտահայտություններ՝ կանոնավոր եռանկյան, քառակուսու և կանոնավոր վեցանկյան կողմերի համար.

$$a_3 = 2R\sin\frac{180^\circ}{3} = 2R\sin 60^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}, \qquad (4)$$

$$a_4 = 2R\sin\frac{180^\circ}{4} = 2R\sin 45^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}, \qquad (5)$$

$$a_6 = 2R\sin\frac{180^\circ}{6} = 2R\sin 30^\circ = 2R\cdot\frac{1}{2} = R: \qquad (6)$$

50. Բազմանիստերի մակերևույթների մակերեսները

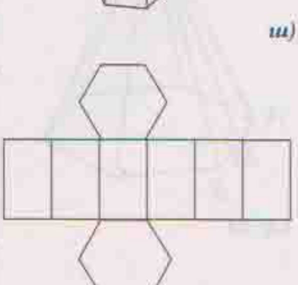
Գիտենք, որ յուրաքանչյուր բազմանիստի մակերևույթը կազմված է բազմանկյուններից, որոնք նրա նիստերն են: Օգտվելով մակերեսների հիմնական հատկություններից՝ կարելի է հաշվել ցանկացած բազմանիստի մակերևույթի մակերեսը. դրա համար հարկավոր է նախ հաշվել բազմանիստի բոլոր նիստերի մակերեսները, այնուհետև ստացված մեծությունները գումարել: Ինչ վերաբերում է նիստերի մակերեսներին, ապա դրանցից յուրաքանչյուրի համար, կախված տվյալներից, հարկավոր է ընտրել այնպիսի բանաձև, որով հարմար կլինի հաշվել այդ բազմանկյան մակերեսը: Սակայն նշենք, որ որոշ բազմանիստերի համար կարիք չկա առանձին-առանձին հաշվելու նրա բոլոր նիստերի մակերեսները: Օրինակ՝ խորանարդի և ուղղանկյունանիստի համար մենք արդեն արտածել ենք բանաձևեր, որոնց օգնությամբ միանգամից կարող ենք հաշվել նրանց մակերևույթների մակերեսները (տես 45–46-րդ կետերը 8-րդ դասարանի դասագրքում): Այստեղ կդիտարկենք այդպիսի այլ մարմինների օրինակներ ևս:

ա) Կանոնավոր պրիզմայի մակերևույթի մակերեսը

Դիտարկենք այնպիսի ուղիղ պրիզմա, որի հիմքերը կանոնավոր բազմանկյուն են. այդպիսի պրիզմաները կոչվում են կանոնավոր պրիզմա: Կանոնավոր n-անկյուն պրիզմայի հիմքը կանոնավոր n-անկյուն բազմանկյուն է, իսկ կողմնային նիստերը՝ միմյանց հավասար ուղղանկյուններ են *(նկ. 93(ա))*: Եթե պրիզմայի հիմքի մակերեսը նշանակենք $S_հ$-ով, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսների գումարը, այսինքն՝ պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ $S_կ$, ապա այդ պրիզմայի լրիվ մակերևույթի $S_լ$ մակերեսը կլինի՝ $S_լ = 2S_հ + S_կ$: (1)

Նշենք, որ $S_հ$-ը կարող ենք հաշվել՝ օգտվելով, օրինակ, 49-րդ կետի բանաձևերից: Ինչ վերաբերում է $S_կ$-ին, ապա դրա համար բավարար է իմանալ պրիզմայի հիմքի կողմը՝ a-ն, և կողմնային կողը՝ h-ը: Իրոք, կողմնային նիստերից յուրաքանչ-

ա)



Պրիզմայի մակերևույթի փռվածքը

բ)

Նկ. 93

յուրի՝ որպես ուղղանկյան, մակերեսը հավասար է ah, ուրեմն՝ $S_{\text{կ}} = n \cdot ah$: Նկատենք, որ na–ն հավասար է պրիզմայի հիմքի P *պարագծին, հետևաբար՝ կանոնավոր պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է հիմքի պարագծի և կողմնային կողի արտադրյալին.*

$$S_{\text{կ}} = P \cdot h \qquad (2)$$

Եթե պատկերացնենք, որ պրիզմայի կողմնային նիստերը հաջորդաբար դասավորել ենք հարթության վրա, ապա կստացվի նրա կողմնային մակերևույթի փռվածքը *(նկ. 93(բ))*: Այն ներկայացնում է մի ուղղանկյուն, որի կից կողմերից մեկը հավասար է պրիզմայի հիմքի պարագծին, իսկ մյուսը՝ պրիզմայի կողմնային կողին:

Պարզվում է, որ նույնպիսի ուղղանկյուն է ներկայացնում նաև ցանկացած ուղիղ պրիզմայի կողմնային մակերևույթի փռվածքը, որի մակերեսը նույնպես կարելի է հաշվել (2) բանաձևով:

Խնդիր 1: Հաշվել կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի մակերևույթի մակերեսը, եթե հայտնի է, որ պրիզմայի հիմքի կողմը 6 սմ է, կողմնային կողը՝ 5 սմ:

Լուծում: Այդ պրիզմայի հիմքը $a = 6$ սմ կողմով հավասարակողմ եռանկյուն է, ուրեմն՝ $S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{սմ}^2 = 9\sqrt{3}\,\text{սմ}^2$:

Այժմ (2) բանաձևով հաշվենք կողմնային մակերևույթի մակերեսը. $S_{\text{կ}} = Ph = 3ah = 3 \cdot 6 \cdot 5$ սմ^2 $= 90$ սմ^2:

Այսպիսով՝ $S = 2S_{\text{հ}} + S_{\text{կ}} = 2 \cdot 9\sqrt{3}\,\text{սմ}^2 + 90\,\text{սմ}^2 = 18((\sqrt{3}+5))\,\text{սմ}^2$:

բ) Կանոնավոր բուրգի մակերևույթի մակերեսը

Դիտարկենք այնպիսի բուրգ, որի հիմքը կանոնավոր բազմանկյուն է, և բոլոր կողմնային կողերը հավասար են. այդպիսի բուրգը կանվանենք *կանոնավոր բուրգ:*

Նկ. 94

Կանոնավոր n–անկյուն բուրգի հիմքը կանոնավոր n–անկյուն բազմանկյուն է, իսկ կողմնային նիստերը միմյանց հավասար հավասարասրուն եռանկյուններ են *(նկ. 94)*: Եթե բուրգի հիմքի մակերեսը նշանակենք $S_{\text{հ}}$–ով, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսների գումարը, այսինքն՝ բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ $S_{\text{կ}}$–ով, ապա այդ բուրգի լրիվ մակերևույթի $S_{\text{լ}}$ մակերեսը կլինի.

$$S_{\text{լ}} = S_{\text{հ}} + S_{\text{կ}} \qquad (3)$$

Նշենք, որ $S_{\text{հ}}$–ը կարող ենք հաշվել այնպես, ինչպես հաշվում էինք կանոնավոր պրիզմայի դեպքում: Ինչ վերաբերում է $S_{\text{կ}}$–ին, ապա դրա համար բավարար է իմանալ բուրգի հիմքի կողմը՝ a–ն, և բուրգի գագաթից դրան իջեցրած բարձրությունը՝ $h_{\text{կ}}$–ն: Նկատենք, որ $h_{\text{կ}}$–ն բուրգի կողմնային նիստի բարձրությունն է, որը կոչվում է *բուրգի հարթագիծ (SM–ը նկ. 94–ում):*

Այսպիսով՝ $S_{\text{կ}} = n \cdot S_{ASB} = n \cdot \frac{1}{2}ah_{\text{կ}} = \frac{1}{2}na \cdot h_{\text{կ}}$: Քանի որ na–ն հավասար է բուրգի հիմքի P պարագծին, ուրեմն՝ *կանոնավոր* *բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա հիմքի պարագծի և հարթագծի արտադրյալի կեսին.*

$$S_կ = \frac{1}{2} P h_կ \qquad (4)$$

Խնդիր 2: Հաշվել կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե հայտնի է, որ բուրգի հիմքի կողմը 10 սմ է, իսկ կողմնային կողը՝ 13 սմ:

Լուծում: Ըստ (4) բանաձևի՝ $S = \frac{1}{2} P h_կ$: Նախ հաշվենք հիմքի պարագիծը. $P = 6a = 6 \cdot 10$ սմ $= 60$ սմ: Այժմ գտնենք $h_կ$-ն, որը ASB հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված բարձրությունն է, այսինքն՝ $h_կ = SM$ *(տես նկ. 94)*: Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$(սմ), այսինքն՝ $h_կ = 12$ սմ: Այսպիսով՝ $S_կ = \frac{1}{2} \cdot 60\,սմ \cdot 12\,սմ = 360\,սմ^2$:

Պ ա ր զ ա բ ա ն ո ւ մ: Նկատենք, որ տվյալ բուրգի կողմնային նիստի մակերեսը կարող էինք հաշվել նաև՝ օգտվելով Հերոնի բանաձևից, որից հետո մնում էր ստացված մեծությունը բազմապատկել 6-ով, և կստանայինք $S_կ$-ն:

Հարցեր և խնդիրներ

350. Գտեք շեղանկյան մակերեսը, եթե նրա կողմը հավասար է 12 սմ, իսկ անկյունը՝ 60°:

351. Գտեք շեղանկյան կողմը, եթե նրա մակերեսը հավասար է $8\sqrt{2}սմ^2$, իսկ անկյունը՝ 45°:

352. Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը, եթե նրա անկյունագծերը հավասար են 10 սմ և 8 սմ, իսկ նրանցով կազմված անկյունը՝ 60°:

353. Զուգահեռագծի մակերեսը 100 սմ^2 է, պարագիծը՝ 60 սմ, իսկ սուր անկյունը՝ 30°: Գտեք նրա փոքր կողմի երկարությունը:

354. Շեղանկյան մակերեսը 30 սմ^2 է, իսկ անկյունագծերից մեկը՝ 5 սմ: Գտեք շեղանկյան բարձրությունը:

355. Ուղղանկյան անկյունագիծը 10 սմ է, իսկ մակերեսը՝ 25 սմ^2: Գտեք անկյունագծերով կազմված անկյունները:

356. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագիծը 18 սմ է և մեծ հիմքի հետ կազմում է 15° անկյուն: Գտեք սեղանի մակերեսը:

357. Քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են և ունեն 8 սմ և 12 սմ երկարություն: Գտեք այդ քառանկյանը հավասարամեծ քառակուսու կողմը:

358. Եռանկյան կողմերն են՝ 26 սմ, 28 սմ և 3 դմ: Գտեք եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

359. $ABCD$ զուգահեռագծում $BC = 3\sqrt{3}$սմ, $\angle BAD = 30^\circ$, $BD = BC$: Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը:

360. Ապացուցեք, որ տրված անկյունագծով ուղղանկյուններից մեծագույն մակերեսն ունի քառակուսին:

361. Ապացուցեք, որ տրված անկյունագծերով զուգահեռագծերից մեծագույն մակերեսն ունի շեղանկյունը:

362. Ապացուցեք, որ տրված կողմերն ունեցող զուգահեռագծերից մեծագույն մակերեսն ունի ուղղանկյունը:

363. Գտեք հավասարասրուն սեղանի մակերեսը, եթե նրա հիմքերը հավասար են 12 սմ և 20 սմ, իսկ անկյունագծերը փոխուղղահայաց են:

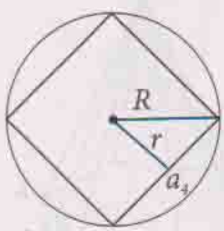
364. Սեղանը անկյունագծերով տրոհվում է չորս եռանկյան: Ապացուցեք, որ դրանցից երկուսը, որոնք պարունակում են սեղանի ոչ զուգահեռ կողմերը, հավասարամեծ են:

365. Ապացուցեք, որ կանոնավոր եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը երկու անգամ մեծ է ներգծած շրջանագծի շառավղից:

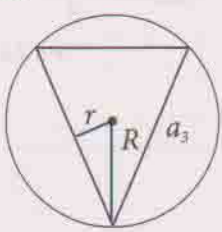
366. Շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյան կողմը հավասար է a–ի: Գտեք այդ շրջանագծին ներգծած քառակուսու կողմը:

367. Կանոնավոր եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը $\sqrt{3}$սմ է: Գտեք եռանկյան պարագիծը և մակերեսը:

368. Կանոնավոր վեցանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը $2\sqrt{3}$սմ է: Գտեք վեցանկյան պարագիծը և մակերեսը:



ա)



բ)
Նկ. 94

369. 95(ա) նկարում պատկերված է R շառավիղով շրջանագծին ներգծած քառակուսի: Աղյուսակն արտագծեք տետրում և լրացրեք դատարկ վանդակները (a_4–ը քառակուսու կողմն է, P–ն՝ քառակուսու պարագիծը, S–ը՝ նրա մակերեսը, r–ը՝ ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը):

N	R	r	a_4	P	S
1			6		
2		2			
3	4				
4				28	
5					16

370. 95(բ) նկարում պատկերված է R շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյուն: Աղյուսակն արտագծեք տետրում և լրացրեք դատարկ վանդակները (a_3–ը եռանկյան կողմն է, P–ն՝ եռանկյան պարագիծը, S–ը՝ նրա մակերեսը, r–ը՝ ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը):

N	R	r	a_3	P	S
1	3				
2					10
3		2			
4			5		
5				6	

371. Կանոնավոր վեցանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը $2\sqrt{3}$սմ է: Գտեք վեցանկյան անկյունագծերը:

372. Գազի փականի գլխիկի հատույթն ունի 3 սմ կողմով կանոնավոր եռանկյան ձև: Որքա՞ն պետք է լինի այն մետաղաձողի տրամագիծը, որից պատրաստելու են փականը:

373. Հեղույսի վերին հիմքն ունի կանոնավոր վեցանկյան ձև, որի զուգահեռ կողմերի հեռավորությունը 1,5 սմ է: Գտեք վերին հիմքի մակերեսը:

374. Կանոնավոր եռանկյան, քառակուսու և կանոնավոր վեցանկյան կողմերը հավասար են իրար: Գտեք այդ բազմանկյունների մակերեսների հարաբերությունները:

375. Գտեք շրջանագծին ներգծած և արտագծած կանոնավոր վեցանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

376. $A_1A_2\ldots A_8$ կանոնավոր ութանկյունը ներգծված է R շառավիղով շրջանագծին: Ապացուցեք, որ $A_3A_4A_7A_8$ քառանկյունը ուղղանկյուն է, և նրա մակերեսը արտահայտեք R–ով:

377. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը 6 սմ կողմով հավասարակողմ եռանկյուն է, իսկ կողմնային նիստերը քառակուսիներ են: Գտեք՝ ա) պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, բ) պրիզմայի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

378. Պրիզմայի հիմքը կանոնավոր վեցանկյուն է, իսկ կողմնային մակերևույթի փռվածքը 144 սմ^2 մակերեսով քառակուսի է: Գտեք պրիզմայի հիմքի մակերեսը:

379. Եռանկյուն բուրգի նիստերից յուրաքանչյուրը 24 սմ պարագծով հավասարակողմ եռանկյուն է: Գտեք բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

380. *Եկեղեցու գմբեթն ունի կանոնավոր տասներկուանկյուն բուրգի տեսք, որի հիմքի պարագիծը 18 մ է, հարթագիծը՝ 8 մ: Որքա՞ն է գմբեթի յուրաքանչյուր նիստի մակերեսը:*

381. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 16 սմ է, իսկ կողմնային կողը՝ 10 սմ: Գտեք բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

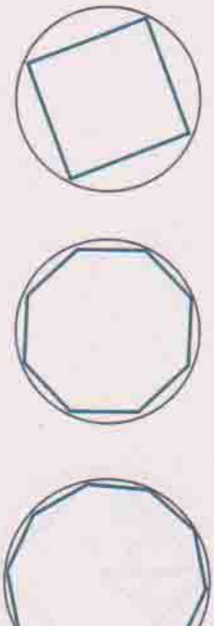
§2 ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

51. Շրջանագծի երկարությունը

Նկ. 96

Շրջանագծի երկարության մասին ակնառու պատկերացում ունենալու համար ընդունենք, որ շրջանագիծը պատրաստված է նուրբ և չձգվող թելից: Եթե մենք թելը կտրենք ինչ որ A կետում և այն ուղղենք, ապա կստանանք AA_1 հատված *(նկ. 96)*: Հենց այդ հատվածի երկարությունն էլ կլինի շրջանագծի երկարությունը:

Շրջանագծին ներգծած յուրաքանչյուր կանոնավոր բազմանկյան պարագիծը շրջանագծի երկարության մոտավոր արժեք է: Որքան մեծ է այդ բազմանկյան կողմերի թիվը, այնքան ավելի ճշգրիտ է այդ մոտավոր արժեքը: Բանն այն է, որ բազմանկյան կողմերի թիվը ավելացնելիս այն ավելի ու ավելի կիպ է «հպվում» շրջանագծին *(նկ. 97)*: Այսպիսով՝ շրջանագծին «հանելու» համար անհրաժեշտ է նրան ներգծած կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվը ավելացնել, հետո դարձյալ ավելացնել և այդպես շարունակ: Շրջանագծի երկարության ճշգրիտ արժեքը այն սահմանն է, որին «ձգտում է» նրան ներգծած կանոնավոր բազմանկյան պարագիծը, եթե այդ բազմանկյան կողմերի թիվն անսահմանորեն ավելանում է:



Նկ. 97

Արտածենք մի բանաձև, որը շրջանագծի երկարությունն արտահայտում է նրա շառավիղով:

Դիցուք՝ C-ն և C'-ը R և R' շառավիղներով շրջանագծերի երկարություններն են: Շրջանագծերից յուրաքանչյուրին ներգծենք կանոնավոր n-անկյուն: Դրանց պարագծերը նշանակենք P_n և P'_n, իսկ կողմերը՝ a_n և a'_n: Օգտվենք 49-րդ կետի (2) բանաձևից՝ ստանում ենք.

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n},\ P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R'\sin\frac{180^\circ}{n}:$$

Հետևաբար՝ $$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'} \qquad (1)$$

Այս հավասարությունը տեղի ունի n-ի ցանկացած արժեքի դեպքում: Այժմ n թիվը անսահմանորեն մեծացնենք: Քանի որ $n\to\infty$ դեպքում $P_n\to C$ և $P'_n\to C'$, ապա $\frac{P_n}{P'_n}$ հարաբերության սահմանը հավասար է $\frac{C}{C'}$: Մյուս կողմից, ըստ վերոհիշյալ (1) հավասարության՝ այդ հարաբերությունը հավասար է $\frac{2R}{2R'}$:

Այսպիսով՝ $\frac{C}{C'}=\frac{2R}{2R'}$: Այս հավասարությունից հետևում է, որ $\frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'}$: Սա նշանակում է, որ ***յուրաքանչյուր շրջանագծի երկարության և նրա տրամագծի հարաբերությունը միևնույն թիվն է բոլոր շրջանագծերի համար:*** Ընդունված է այդ թիվը նշանակել հունական այբուբենի π տառով (կարդացվում է «պի»):

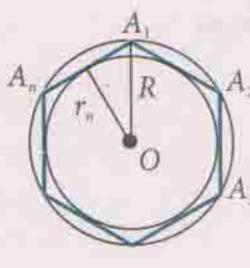
$\frac{C}{2R}=\pi$ հավասարությունից ստանում ենք R շառավիղով շրջանագծի երկարությունը հաշվելու բանաձևը՝ $C=2\pi R$:

Ապացուցված է, որ π թիվը անվերջ՝ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակ է, այսինքն՝ այն իռացիոնալ թիվ է: π թվի մոտավոր արժեք է $\frac{22}{7}$ ռացիոնալ թիվը, որն ունի 0,002 ճշգրտությունը: Ուշագրավ է այն փաստը, որ այդ մոտավոր թիվը դեռևս մ.թ.ա. 3–րդ դարում հայտնաբերել է հույն մեծանուն գիտնական *Արքիմեդը*: Գործնականում խնդիրներ լուծելիս, սովորաբար, օգտվում են $\pi=3{,}14$ մոտավոր արժեքից, որն էլ ունի 0,01 ճշգրտություն:

Այժմ արտածենք շրջանագծի՝ α աստիճանային չափ ունեցող աղեղի l երկարության հաշվման բանաձևը: Քանի որ ամբողջ շրջանագծի երկարությունը հավասար է $2\pi R$, ապա 1° աղեղի երկարությունը հավասար է $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$: Ուստի՝ l երկարությունն արտահայտվում է $l=\frac{\pi R}{180}\cdot\alpha$ բանաձևով:

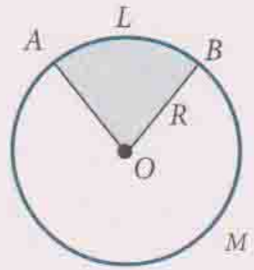
52. Շրջանի մակերեսը

Հիշենք, որ *շրջան* կոչվում է հարթության այն մասը, որը սահմանափակված է շրջանագծով: O կենտրոնով և R շառավիղով շրջանը պարունակում է O կետը և հարթության բոլոր այն կետերը, որոնք O կետից գտնվում են R–ից ոչ մեծ հեռավորության վրա: Նշենք, որ շրջանի մեջ ներառվում է նաև նրան եզերող շրջանագիծը:



Նկ. 98

Արտածենք R շառավիղով շրջանի մակերեսի բանաձևը: Դրա համար դիտարկենք $A_1A_2\ldots A_n$ կանոնավոր n–անկյունը, որը ներգծած է տվյալ շրջանը եզերող շրջանագծին *(նկ. 98)*: Հասկանալի է, որ տրված շրջանի S մակերեսը մեծ է $A_1A_2\ldots A_n$ բազմանկյան S_n մակերեսից, քանի որ բազմանկյունն ամբողջությամբ ընդգրկվում է տրված շրջանի մեջ: Մյուս կողմից՝ այդ բազմանկյանը ներգծած շրջանի S'_n մակերեսը ավելի փոքր է, քան S_n–ը, քանի որ այդ երկրորդ շրջանը, իր հերթին, ամբողջությամբ ընդգրկված է բազմանկյան մեջ:



Նկ. 99

Այսպիսով՝ $S'_n < S_n < S$: (2)

Այժմ անսահմանորեն ավելացնենք բազմանկյան կողմերի թիվը: Ըստ 49–րդ կետի (3) բանաձևի՝ ունենք $r_n = R\cos\frac{180^\circ}{n}$, որտեղ r_n–ը բազմանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղն է: Երբ n–ը անսահմանորեն մեծանում է, $\frac{180^\circ}{n}$ կոտորակը «ձգտում է» 0–ի:

Հետևաբար՝ $n \to \infty$ դեպքում $\cos\frac{180^\circ}{n} \to 1$ և, ուրեմն, $r_n \to R$: Այլ խոսքով՝ բազմանկյան կողմերի թիվը անսահմանորեն ավելանալիս նրա ներգծյալ շրջանագիծը «ձգտում է» արտագծյալ շրջանագծին: Ուստի՝ $n \to \infty$ դեպքում $S'_n \to S$:

Ըստ 49–րդ կետի (1) բանաձևի՝ $S_n = \frac{1}{2}P_n r_n$, որտեղ P_n–ը $A_1A_2\dots A_n$ բազմանկյան պարագիծն է: Հաշվի առնենք, որ $n \to \infty$ դեպքում $P_n \to 2\pi R$ և $S_n \to S$: Ստանում ենք՝ $S = \frac{1}{2}\cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$: Այսպիսով՝ R շառավիղով շրջանի մակերեսը հաշվելու համար ստանում ենք հետևյալ բանաձևը. $S = \pi R^2$:

Պ ա ր զ ա բ ա ն ու մ: Դարեր շարունակ շատ մաթեմատիկոսներ ջանքեր էին գործադրում, որպեսզի լուծեն մի խնդիր, որը հայտնի է *շրջանի քառակուսացման խնդիր* անվանումով: Իսկ խնդիրը հետևյալն էր. քանոնի և կարկինի օգնությամբ կառուցել մի քառակուսի, որի մակերեսը հավասար է տրված շրջանի մակերեսին: Ի վերջո՝ միայն 19–րդ դարի ավարտին հաջողվեց ապացուցել, որ այդպիսի կառուցումն անհնար է:

53. Շրջանային սեկտորի մակերեսը

Շրջանային սեկտոր կամ, պարզապես, *սեկտոր* կոչվում է շրջանի այն մասը, որը սահմանափակված է աղեղով և այդ աղեղի ծայրակետերը շրջանի կենտրոնին միացնող երկու շառավիղով: Աղեղը, որ եզերում է սեկտորը, կոչվում է *սեկտորի աղեղ*: Նկար 99–ում պատկերված են ALB և AMB աղեղներով երկու սեկտոր: Այդ սեկտորներից առաջինը ստվերագծված է:

Արտածենք α աստիճանային չափի աղեղով եզերված՝ R շառավիղով շրջանային սեկտորի S մակերեսը հաշվելու բանաձևը: Քանի որ ամբողջ շրջանի մակերեսը հավասար է πR^2, ապա 1° աղեղով եզերված սեկտորի մակերեսը հավասար է $\frac{\pi R^2}{360}$: Ուստի՝ S մակերեսն արտահայտվում է $S = \frac{\pi R^2}{360}\cdot\alpha$ բանաձևով:

Եթե նկատի ունենանք, որ սեկտորի աղեղի երկարությունը որոշվում է $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ բանաձևով, ապա սեկտորի մակերեսի համար կարող ենք ստանալ ևս մեկ բանաձև. $S = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha \cdot \frac{R}{2} = \frac{lR}{2}$:

Այսպիսով՝ *սեկտորի մակերեսը հավասար է նրա աղեղի երկարության և շառավիղի արտադրյալի կեսին.* $S = \frac{lR}{2}$:

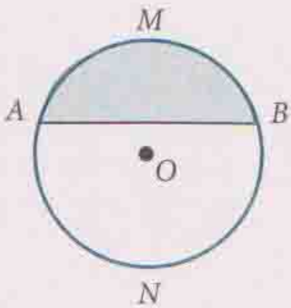
54. Սեգմենտի մակերեսը

Սեգմենտ կոչվում է շրջանի այն մասը, որը սահմանափակված է աղեղով և այդ աղեղի ծայրակետերը միացնող լարով: 100(ա) նկարում O կենտրոնով շրջանը AB լարով տրոհված է երկու սեգմենտի: Դրանցից մեկը, որին եզերում է 180°-ից փոքր AMB աղեղը, ստվերագծված է: Այդ սեգմենտի $S_{սգ}$ մակերեսը կարող ենք ստանալ, եթե նույն աղեղով եզերված սեկտորի $S_{սկ}$ մակերեսից հանենք AOB եռանկյան S_Δ մակերեսը *(նկ. 100(բ))*.

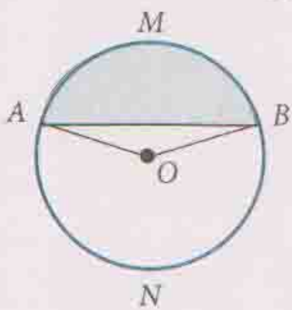
$S_{սգ} = S_{սկ} - S_\Delta$:

Նույն եղանակով է հաշվվում ANB աղեղով եզերված սեգմենտի մակերեսը՝ սակայն մի տարբերությամբ: Դժվար չէ նկատել, որ այդ դեպքում, երբ աղեղի աստիճանային չափը մեծ է 180°-ից, սեգմենտի մակերեսը հավասար է սեկտորի մակերեսի և եռանկյան մակերեսի գումարին. $S_{սգ} = S_{սկ} + S_\Delta$:

Այսպիսով՝ R շառավիղով շրջանի՝ α աստիճանային չափ ունեցող աղեղով եզերված սեգմենտի մակերեսը հաշվում են հետևյալ բանաձևով. $S_{սգ} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \pm S_\Delta$, որտեղ «+» նշանը դրվում է, եթե $\alpha > 180^\circ$, իսկ եթե $\alpha < 180^\circ$, ապա դրվում է «–» նշանը: Ինչ վերաբերում է $\alpha = 180^\circ$ աղեղով եզերված սեգմենտին՝ այն կարելի է դիտել որպես կիսաշրջան կամ սեկտոր, որի մակերեսը $\frac{\pi R^2}{2}$ է:



ա)



բ)

Նկ. 100

Հարցեր և խնդիրներ

382. Հաշվեք շրջանագծի երկարությունը, եթե շառավիղը հավասար է՝ ա) 10 մ, բ) 15 մ, գ) 35 մ:

383. Հաշվեք շառավիղը, եթե շրջանագծի երկարությունը հավասար է՝ ա) 1 մ, բ) 25 սմ, գ) 4,75 դմ: Օգտվեք $\pi = 3,14$ արժեքից:

384. Որոշեք շրջանագծի երկարությունը, եթե նրան ներգծած կանոնավոր վեցանկյան պարագիծը 24 սմ է:

385. Արտագծեք աղյուսակը և, օգտագործելով R շառավիղով շրջանագծի C երկարության բանաձևը, լրացրեք աղյուսակի դատարկ վանդակները: Օգտվեք $\pi = 3{,}14$ արժեքից:

C			82	18π		6,28			$2\sqrt{2}$
R	4	3			0,7		101,5	$2\frac{1}{3}$	

386. Ինչպե՞ս կփոխվի շրջանագծի երկարությունը, եթե շրջանագծի շառավիղը՝ ա) մեծացվի երեք անգամ, բ) փոքրացվի երկու անգամ, գ) մեծացվի k անգամ, դ) փոքրացվի k անգամ:

387. Ինչպե՞ս կփոխվի շրջանագծի շառավիղը, եթե շրջանագծի երկարությունը՝ ա) մեծացվի k անգամ, բ) փոքրացվի k անգամ:

388. Որոշեք շրջանագծի շառավիղը, եթե շրջանագիծն իր տրամագծից 107 սմ–ով երկար է:

389. Գտեք այն շրջանագծի երկարությունը, որը ներգծված է՝ ա) a կողմով քառակուսուն, բ) c ներքնաձիգով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյանը, գ) c ներքնաձիգով և α սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյանը, դ) հիմքին առընթեր α անկյունով և հիմքին տարված h բարձրությամբ հավասարասրուն եռանկյանը:

390. Շոգեքարշն անցավ 1413 մ: Գտեք շոգեքարշի անիվի տրամագիծը, եթե հայտնի է, որ այն կատարել է 300 պտույտ:

391. Գտեք Երկրի արհեստական արբանյակի շրջանային ուղեծրի երկարությունը, եթե արբանյակը պտտվում է Երկրից 320 կմ հեռավորության վրա, իսկ Երկրի շառավիղը հավասար է 6370 կմ:

392. Երկաթուղագծի կորության շառավիղը հավասար է 1200 մ, աղեղի երկարությունը՝ 450 մ: Գտեք այդ աղեղի աստիճանային չափը:

393. Շրջանագիծը, որի շառավիղը 2 սմ է, վերածված է մի շրջանային աղեղի, որի շառավիղը հավասար է 5 սմ: Գտեք ստացված կենտրոնային անկյունը:

394. 4 սմ շառավիղ ունեցող շրջանային աղեղը, որի աստիճանային չափը 120° է, հավասար է մեկ այլ շրջանագծի երկարությանը: Գտեք այդ շրջանագծի շառավիղը:

395. Շրջանագիծը, որի շառավիղն է 6 սմ, բացված է աղեղի ձևով: Գտեք այդ աղեղի շառավիղը, եթե նրա կենտրոնային անկյունը հավասար է 300°:

396. Տրված a լարով որոշեք նրա ձգած աղեղի երկարությունը, եթե վերջինիս աստիճանային չափը հավասար է՝ ա) 60°, բ) 90°, գ) 120°:

397. 120° աստիճանային չափ ունեցող AB աղեղի ծայրերից շրջանագծին տարված են շոշափողներ, որոնք հատվում են C կետում: Ստացված ACB անկյանը ներգծած է այնպիսի շրջանագիծ, որն այդ աղեղի հետ ունի արտաքին շոշափում: Ապացուցեք, որ այդ շրջանագծի երկարությունը հավասար է տրված AB աղեղի երկարությանը:

398. Գտեք պատի ժամացույցի ճոճանակի երկարությունը, եթե նրա ճոճման անկյունը կազմում է 38°, իսկ աղեղի երկարությունը, որը գծում է ճոճանակի ծայրը, հավասար է 24 սմ:

399. Երկաթուղային պաստառի կլորացման շառավիղը հավասար է 5կմ, իսկ կլորացման աղեղի երկարությունը՝ 400 մ: Որքա՞ն է կլորացման աղեղի աստիճանային չափը:

400. Արտագծեք աղյուսակը և օգտագործելով R շառավիղով շրջանի S մակերեսի բանաձևը՝ լրացրեք դատարկ վանդակները: Օգտվեք $\pi = 3{,}14$ արժեքից:

S			9		49π			6,25
R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3	$\sqrt{3}$	

401. Ինչպե՞ս կփոխվի շրջանի մակերեսը, եթե նրա շառավիղը՝ ա) մեծացվի k անգամ, բ) փոքրացվի k անգամ:

402. Գտեք այն շրջանի մակերեսը, որը եզրող շրջանագիծն արտագծված է՝ ա) a և b կողմերով ուղղանկյանը, բ) a էջով և դիմացի α անկյունով ուղղանկյուն եռանկյանը, գ) a հիմքով և հիմքին տարված h բարձրությամբ հավասարասրուն եռանկյանը:

403. Գտեք այն շրջանի մակերեսը, որը եզրող շրջանագիծը ներգծված է՝ ա) a կողմով հավասարակողմ եռանկյանը, բ) a էջով և նրան առընթեր α սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյանը, գ) a սրունքով և գագաթի α անկյունով հավասարասրուն եռանկյանը, դ) a մեծ հիմքով և α սուր անկյունով հավասարասրուն սեղանին:

404. Կրկեսի հրապարակի շրջանագծի երկարությունը հավասար է 41 մ: Գտեք հրապարակի տրամագիծը և մակերեսը:

405. Գտեք ընդհանուր կենտրոնով և R_1 ու R_2 շառավիղներով ($R_1<R_2$) երկու շրջանագծերով սահմանափակված օղակի մակերեսը: Հաշվեք օղակի մակերեսը, եթե $R_1 = 1{,}5$ սմ, $R_2 = 2{,}5$ սմ:

406. Թիրախի վրա պատկերված են ընդհանուր կենտրոնով չորս շրջանագիծ, որոնց շառավիղները հավասար են 1, 2, 3 և 4: Գտեք փոքրագույն շրջանի մակերեսը, ինչպես նաև թիրախի երեք օղակներից յուրաքանչյուրի մակերեսը:

407. Ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի՝ որպես տրամագծերի, վրա կառուցված են երեք կիսաշրջան: Ապացուցեք, որ ներքնաձիգի վրա կառուցված կիսաշրջանի մակերեսը հավասար է էջերի վրա կառուցված կիսաշրջանների մակերեսների գումարին:

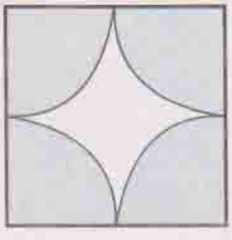
408. 10 սմ շառավիղով շրջանից կտրված է 60° աղեղով սեկտոր: Գտեք շրջանի մնացած մասի մակերեսը:

409. 120° կենտրոնային անկյունով սեկտորի մակերեսը հավասար է S: Գտեք սեկտորի շառավիղը:

410. Որոշեք սեգմենտի մակերեսը, եթե շառավիղը R է, իսկ աղեղի աստիճանային չափը՝ ա) 60°, բ) 90°, գ) 45°, դ) 30°:

411. Որոշեք սեգմենտի մակերեսը, եթե լարը հավասար է a–ի, իսկ աղեղը՝ ա) 120°, բ) 90°, գ) 60°:

412. Գտեք R շառավիղով շրջանի այն մասի մակերեսը, որը գտնվում է նրան ներգծած՝ ա) քառակուսուց դուրս, բ) կանոնավոր եռանկյունից դուրս, գ) կանոնավոր վեցանկյունից դուրս:



a

Նկ. 101

413. Նկար 101–ում պատկերված քառակուսու կողմը a է: Հաշվեք ստվերագծված պատկերի մակերեսը:

§3 ԳԼԱՆԻ, ԿՈՆԻ ԵՎ ԳՆԴԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

55. Գլանի մակերևույթի մակերեսը

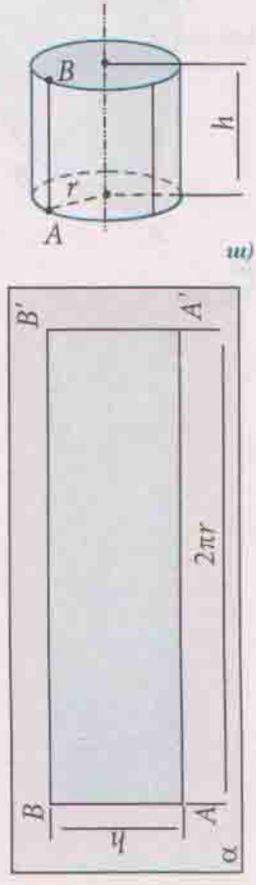
Գիտենք, որ գլան առաջանում է ուղղանկյան՝ կողմերից մեկի շուրջը պտտումից: Այդ կողմին հանդիպակաց կողմի պտույտից առաջանում է գլանի *կողմնային մակերևույթը*, որին անվանում են նաև *գլանային մակերևույթ*: Իսկ ուղղանկյան մյուս երկու հանդիպակաց կողմերի պտույտներից առաջանում են հավասար շրջաններ, որոնք գլանի հիմքերն են: Հիշենք, որ գլանի ծնորդները միմյանց հավասար են, և դրանցից յուրաքանչյուրը հավասար է գլանի հիմքերի կենտրոնները միացնող հատվածին, որին անվանում են *գլանի բարձրություն*: Նկար 102 (ա)–ում պատկերված է գլան, որի հիմքի շառավիղը r է, բարձրությունը՝ h:

Պատկերացնենք, որ գլանի կողմնային մակերևույթը ծնորդներից մեկով՝ AB–ով, կտրել և հարթության վրա փռել ենք այնպես, որ ստացվել է ուղղանկյուն՝ $ABB'A'$–ը *(նկ. 102(բ))*: Այդ ուղղանկյունը կոչվում է գլանի կողմնային մակերևույթի փռվածք: Նրա կից կողմերից մեկը՝ AA'–ը, հավասար է գլանի հիմքի շրջանագծի երկարությանը, այսինքն՝ $2\pi r$ է, իսկ մյուս կողմը՝ AB–ն՝ գլանի բարձրությանը. $AB = h$:

Գլանի կողմնային մակերևույթի $S_կ$ մակերեսը հավասար է նրա փռվածքի մակերեսին, այսինքն՝ $S_կ = 2\pi rh$: (1)

Քանի որ գլանի հիմքերից յուրաքանչյուրի $S_հ$ մակերեսը հավասար է πr^2, ուրեմն գլանի լրիվ մակերևույթի $S_լ$ մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ կերպ՝ $S_լ = 2S_հ + S_կ = 2\cdot\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$:

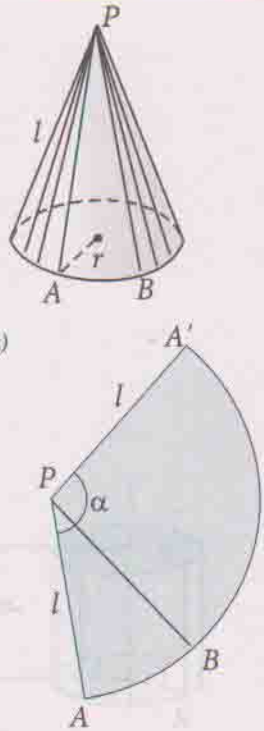
Այսպիսով՝ $S_լ = 2\pi r(r+h)$: (2)



ա)
բ)
Նկ. 102

56. Կոնի մակերևույթի մակերեսը

Գիտենք, որ կոն առաջանում է ուղղանկյուն եռանկյան՝ էջերից մեկի շուրջը պտտումից: Այդ դեպքում եռանկյան մյուս էջի պտույտից առաջանում է շրջան, որը կոնի հիմքն է, իսկ ներքնաձիգի պտույտից առաջանում է *կոնի կողմնային մակերևույթը*, որին անվանում են նաև *կոնային մակերևույթ*: Կոնի ծնորդները, այսինքն՝ կոնի գագաթը հիմքի շրջանագծի կետերին միացնող հատվածները, միմյանց հավասար են, և դրանցից յուրաքանչյուրը հավասար է պտտվող եռանկյան ներքնաձիգին: Եռանկյան պտտվող էջը հավասար է կոնի հիմքի շառավիղին, իսկ մյուս էջը, որը կոնի գագաթը միացնում է հիմքի կենտրոնին, կոչվում է *կոնի բարձրություն*: Նկար 103 (ա)–ում պատկերված է կոն, որի հիմքի շառավիղը r է, իսկ ծնորդը՝ l:



ա)

բ)
Նկ. 103

Պատկերացնենք, որ կոնի կողմնային մակերևույթը ծնորդներից մեկով կտրել և հարթության վրա փռել ենք այնպես, որ ստացվել է շրջանային սեկտոր *(նկ. 103(բ))*: Այդ սեկտորի շառավիղը հավասար է կոնի ծնորդին, այսինքն՝ l է, իսկ աղեղի երկարությունը հավասար է կոնի հիմքի շրջանագծի երկարությանը, այսինքն՝ $2\pi r$ է: Ինչպես գիտենք, շրջանային սեկտորի մակերեսը հավասար է նրա շառավիղի և աղեղի երկարության արտադրյալի կեսին, այսինքն՝ $\frac{2\pi r\cdot l}{2}=\pi rl$:

Կոնի կողմնային մակերևույթի $S_{\text{կ}}$ մակերեսը հավասար է նրա փռվածքի մակերեսին, այսինքն՝ $S_{\text{կ}}=\pi rl$: (3)

Քանի որ կոնի հիմքի $S_{\text{հ}}$ մակերեսը հավասար է πr^2, ուրեմն՝ նրա լրիվ մակերևույթի $S_{\text{լ}}$ մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ կերպ. $S_{\text{լ}}=S_{\text{հ}}+S_{\text{կ}}=\pi r^2+\pi rl=\pi r\,(r+l)$

Այսպիսով՝ $S_{\text{լ}}=\pi r\,(r+l)$ (4)

Խնդիր: Հաշվել այն կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, որն առաջացել է $a=6$ սմ և $b=8$ սմ էջերով ուղղանկյուն եռանկյան՝ մեծ էջի շուրջը պտտումից:

Լուծում: Այդ կոնի հիմքի շառավիղը հավասար է պտտվող եռանկյան փոքր էջին, այսինքն՝ $r=a=6$ սմ: Որպեսզի օգտվենք (4) բանաձևից՝ նախ անհրաժեշտ է գտնել կոնի ծնորդը՝ l-ը: Ծնորդը հավասար է եռանկյան ներքնաձիգին. այն կարող ենք գտնել Պյութագորասի թեորեմի օգնությամբ՝ $l=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{36\text{սմ}^2+64\text{սմ}^2}=10\text{սմ}$:

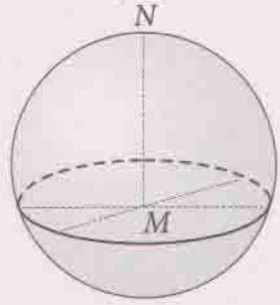
Այսպիսով՝ $S_{\text{լ}}=\pi r\,(r+l)=\pi\cdot 6(6+10)\ \text{սմ}^2=96\pi\text{սմ}^2\approx 301{,}44\ \text{սմ}^2$:

57. Գնդային մակերևույթի մակերեսը

Գիտենք, որ գնդային մակերևույթն այն պատկերն է, որը կազմված է տարածության բոլոր այն կետերից, որոնք տրված կետից (կենտրոնից) ունեն տրված հեռավորություն: Գնդային մակերևույթ կարելի է ստանալ պտտման միջոցով՝ պտտելով կիսաշրջանագիծը տրամագծի շուրջը: Գնդային մակերևույթի և հարթության հատումից ստացվող պատկերը շրջանագիծ է, ընդ որում՝ մեծ շրջանագծեր են առաջանում, երբ հատող հարթություններն անցնում են գնդային մակերևույթի կենտրոնով:

Ի տարբերություն գլանային և կոնային մակերևույթների՝ գնդային մակերևույթը հնարավոր չէ փռել այնպես, որ ստացվի հարթ պատկեր: Այդ պատճառով գնդային մակերևույթի համար պիտանի չէ փռվածքի միջոցով մակերես հաշվելու եղանակը: Այն հարցը, թե ինչը հասկանալ որպես գնդային մակերևույթի մակերես, և այն ինչպե՞ս հաշվել, պահանջում է ավելի խորը հետազոտություն, և դրան դուք կանդրադառնաք ավագ դպրոցում: Այստեղ միայն նշենք, որ R շառավիղով գնդային մակերևույթի մակերեսի համար ստացվել է $S=4\pi R^2$ բանաձևը, որից էլ մենք կօգտվենք գործնական խնդիրներ լուծելիս: Պարզապես նկատենք, որ R շառավիղով գնդի համար πR^2–ն ներկայացնում է նրա մեծ շրջանի մակերեսը, ուրեմն կարող ենք ասել, որ գնդային մակերևույթի մակերեսը հավասար է գնդի մեծ շրջանի մակերեսի քառապատիկին:

Ծ ա ն ո թ ու թ յ ու ն: Ուշագրավ է այն փաստը, որ Հին Հունաստանում բացահայտել էին, որ հարթությամբ հատելիս գնդային մակերևույթից անջատված յուրաքանչյուր մասի (գնդային սեգմենտի) մակերեսը կարելի է հաշվել $S_u = 2\pi RH$ բանաձևով, որտեղ R–ը գնդային մակերևույթի շառավիղն է, իսկ H–ը՝ սեգմենտի բարձրությունը *(MN հատվածը նկ. 104–ում)*: Մասնավորապես, եթե այդ բարձրությունը հավասար լինի գնդի տրամագծին՝ $H = 2R$, ապա որպես սեգմենտի մակերևույթ կներկայանա ամբողջ գնդային մակերևույթը: Սեգմենտի բանաձևի մեջ տեղադրելով H–ի այդ մեծությունը՝ ստացվում է հենց նույն $S = 4\pi R^2$ բանաձևը, որից հաջողությամբ օգտվել են դեռևս մ.թ.ա. 3–րդ դարից ի վեր, և որից այսօր էլ օգտվելու ենք մենք:



Նկ. 104

Հարցեր և խնդիրներ

414. Դիցուք՝ r–ը, h–ը, $S_կ$–ն և $S_լ$–ն գլանի, համապատասխանաբար, շառավիղը, բարձրությունը, կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսներն են: Գտեք՝ ա) $S_կ$–ն և $S_լ$–ն, եթե $r = 7$ սմ, $h = 8$ սմ, բ) h–ը և $S_լ$–ն, եթե $r = 10$ սմ և $S_կ = 120\pi$ սմ^2, գ) h–ը և $S_կ$–ն, եթե $r = 4$ սմ, $S_լ = 64\pi$ սմ^2, դ) r–ը և h–ը, եթե $S_կ = 36\pi$ սմ^2, $S_լ = 54\pi$ սմ^2:

415. 12 սմ և 14 սմ կից կողմերով ուղղանկյունը պտտել են մեծ կողմի շուրջը: Գտեք ստացված գլանի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

416. 2 սմ և 4 սմ կից կողմերով ուղղանկյունը պտտել են մի դեպքում՝ մեծ կողմի, երկրորդ դեպքում՝ փոքր կողմի շուրջը: Համեմատեք ստացված երկու գլանների՝ ա) կողմնային մակերևույթների մակերեսները, բ) լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

417. Գլանի հիմքի տրամագիծը 1մ է, իսկ բարձրությունը հավասար է հիմքի շրջանագծի երկարությանը: Գտեք գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

418. Գլանաձև ցիստեռնը, որի մեջ հիմքի տրամագիծը 2 մ է, բարձրությունը՝ 2,5 մ, անհրաժեշտ է ներսից ամբողջությամբ ներկել: Այդ նպատակով քանի՞ տուփ ներկ է պետք ունենալ, եթե տուփերից յուրաքանչյուրը նախատեսված է 2 մ^2 մակերես ներկելու համար:

419. Որքա՞ն մակերեսով մետաղաթիթեղ է անհրաժեշտ, որպեսզի պատրաստեն 4 մ երկարությամբ և 20 սմ տրամագծով խողովակ, եթե կարերի համար հարկավոր է ավելացնել նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսի 2,5%–ը:

420. Թիթեղագործը 1 մ × 2 մ չափսի մետաղաթիթեղը բաժանում էր չորս հավասար մասերի և յուրաքանչյուրից պատրաստում

1 մ երկարությամբ գլանաձև խողովակ, ընդ որում՝ յուրաքանչյուր խողովակը պատրաստելիս թիթեղից 1 սմ երկայնքով օգտագործում էր եզրերը կարելու համար: Որոշեք պատրաստված խողովակների հաստությունը (տրամագիծը):

421. Դիցուք՝ r–ը, l–ը, $S_կ$–ն և $S_լ$–ն կոնի, համապատասխանաբար, շառավիղը, ծնորդը, կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսներն են: Գտեք՝ ա) $S_կ$–ն և $S_լ$–ն, եթե $r = 6$ սմ, $l = 9$ սմ, բ) l–ը և $S_լ$–ն, եթե $r = 4$ սմ, $S_կ = 24\pi$ սմ^2, գ) l–ը և $S_կ$–ն, եթե $r = 5$ սմ, $S_լ = 60\pi$ սմ^2, դ) r–ը և l–ը, եթե $S_կ = 6\pi$ դմ^2, $S_լ = 10\pi$ դմ^2:

422. 5 սմ և 12 սմ էջեր ունեցող ուղղանկյուն եռանկյունը պտտել են փոքր էջի շուրջը: Գտեք ստացված կոնի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

423. 3 սմ և 4 սմ էջեր ունեցող ուղղանկյուն եռանկյունը պտտել են մի դեպքում մեծ էջի, երկրորդ դեպքում՝ փոքր էջի շուրջը: Համեմատեք ստացված երկու կոների՝ ա) կողմնային մակերևույթների մակերեսները, բ) լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

424. Կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը 28π սմ^2 է, իսկ նրա կողմնային մակերևույթի փռվածքը շրջանային սեկտոր է, որի աղեղը $60°$ է: Գտեք կոնի շառավիղը և ծնորդը:

425. Թանգարանն ունի կոնաձև գմբեթ, որի առանցքային հատույթը 6 մ կողմով հավասարակողմ եռանկյուն է: Հաշվեք գմբեթի մակերևույթի մակերեսը:

426*. 15 սմ և 20 սմ էջերով ուղղանկյուն եռանկյունը պտտում են ներքնաձիգի շուրջը: Գտեք ստացված մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

427. Դիցուք՝ S–ը գնդային մակերևույթի մակերեսն է, R–ը՝ շառավիղը: Գտեք՝ ա) S–ը, եթե $R = 11$ սմ, բ) R–ը, եթե $S = 25\pi$ սմ^2, գ) R–ը և S–ը, եթե գնդի մեծ շրջանի մակերեսը 16π սմ^2 է:

428. Գտեք այն գնդային մակերևույթի մակերեսը, որն առաջանում է 16 սմ տրամագծով կիսաշրջանագծի պտտումից տրամագծի շուրջը:

429. Լուսնի տրամագիծը կազմում է (մոտավորապես) Երկրի տրամագծի քառորդ մասը: Դիտելով որպես գնդեր՝ համեմատեք Լուսնի և Երկրի մակերևույթների մակերեսները:

430. Որքա՞ն մակերեսով կաշի է անհրաժեշտ 10 սմ շառավիղով գնդակ կարելու համար (կարերի համար ավելացնել գնդակի մակերևույթի մակերեսի 8%–ը):

431. Գնդաձև ձմերուկը մեջտեղից կտրատել են այնպես, որ ձմերուկը բաժանվել է չորս հավասար կտորների: Կտորներից յուրաքանչյուրի մակերևույթի մի մասը կեղև է, իսկ մյուս մասը կազմված է երկու միանման հատույթներից: ա) Ի՞նչ պատկեր են ներկայացնում այդ հատույթները: բ) Համեմատեք որևէ կտորի կեղևի մակերեսը նույն կտորի երկու հատույթների ընդհանուր մակերեսի հետ:

§4 ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

58. Գաղափար մարմնի ծավալի մասին

Մարմնի ծավալի հասկացությունը ներմուծվում է հարթ պատկերի մակերեսի հասկացության համանմանությամբ: Ինչպես գիտենք, յուրաքանչյուր բազմանկյուն ունի մակերես, որը չափվում է մակերեսների չափման համար ընտրված միավորի միջոցով: Որպես մակերեսների չափման միավոր՝ սովորաբար վերցվում է այն քառակուսին, որի կողմը հավասար է հատվածների չափման միավորին:

Համանման ձևով կընդունենք, որ մեր դիտարկած մարմիններից յուրաքանչյուրն ունի ծավալ, որը կարելի է չափել ծավալներ չափելու համար ընտրված միավորի միջոցով: Որպես ծավալների չափման միավոր է ընտրվում այն խորանարդը, որի կողը հավասար է հատվածների չափման միավորին: 1 սմ կող ունեցող խորանարդն անվանում են *խորանարդ սանտիմետր* և նշանակում՝ 1 սմ^3: Նույն կերպ որոշվում է *խորանարդ մետրը* (մ^3), *խորանարդ միլիմետրը* (մմ^3) և այլն:

Ծավալների չափման ընթացքը համանման է մակերեսների չափման ընթացքին: Ծավալների չափման համար ընտրված միավորի միջոցով յուրաքանչյուր մարմնի ծավալն արտահայտվում է դրական թվով: Այդ թիվը ցույց է տալիս, թե տվյալ մարմնի մեջ քանի անգամ են տեղավորվում ծավալների չափման միավորն ու նրա մասերը: Օրինակ, եթե իբրև ծավալների չափման միավոր ընտրվում է 1 սմ^3–ը, և այդ դեպքում որևէ մարմնի V ծավալը եղել է 2 միավոր, ապա այդ մեծությունը գրառվում է այսպես՝ $V=2$ սմ^3:

Եթե երկու մարմիններ հավասար են, ապա ծավալների չափման միավորն ու նրա մասերը այդ մարմիններից մեկում տեղավորվում են այնքան անգամ, ինչքան մյուսում:

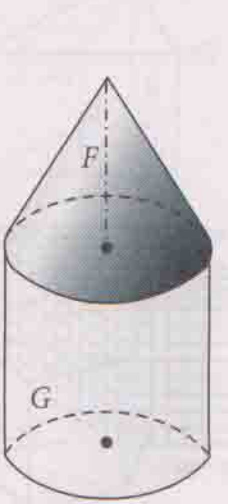
Այսպիսով՝ մարմինների ծավալներն օժտված են հետևյալ հատկությամբ.

1^0. *Հավասար մարմինների ծավալները հավասար են:*

Ծավալների ևս մի հատկություն դիտարկելու համար պատկերացնենք, որ մարմինը կազմված է մի քանի մարմիններից այնպես, որ դրանց ներքին տիրույթները ընդհանուր կետեր չունեն *(նկ. 105)*: Պարզ է, որ այդպիսի մարմնի ծավալը ստացվում է նրա կազմության մեջ մտնող մարմինների ծավալների գումարից: Այսպես.

2^0. *Եթե մարմինը կազմված է մի քանի մարմիններից, ապա նրա ծավալը հավասար է այդ մարմինների ծավալների գումարին:*

1^0 և 2^0 հատկությունները համարվում են *ծավալների հիմնա-*



$V = V_F + V_G$

Նկ. 105

կան հատկություններ: Հիշենք, որ համանման հատկություններով են օժտված նաև հատվածների երկարությունները և բազմանկյունների մակերեսները: Այդ հատկությունների հիման վրա արտածվում են մեր դիտարկած մարմինների ծավալները հաշվելու բանաձևերը: *Այստեղ մենք կծանոթանանք և կօգտագործենք այդ բանաձևերը՝ առանց ճշգրիտ ապացուցումների:* Փոխարենը կքննարկենք ակնառու նկարագրություններ, որոնք պատկերացումներ կտան այդ բանաձևերի արտածման եղանակների վերաբերյալ: Իսկ բանաձևերի արտածումներին դուք հանգամանորեն կանդրադառնաք ավագ դպրոցում:

Պարզաբանում: Նկատենք, որ մարմնի ծավալն արտահայտող թիվը կախված է ծավալի չափման միավորից: Օրինակ՝ դիտարկենք $a = 2{,}5$ սմ կող ունեցող խորանարդ, այսինքն՝ այնպիսի խորանարդ, որի կողի վրա սանտիմետրը տեղավորվում է 2,5 անգամ (դա նշանակում է, որ կողի վրա սմ–ն տեղավորվում է 2 անգամ, սմ–ի տասներորդ մասը՝ 5 անգամ): Այդ դեպքում կարող ենք նաև ասել, որ խորանարդի կողը 25 մմ է, այսինքն՝ կողի վրա միլիմետրը տեղավորվում է 25 անգամ: Դժվար չէ համոզվել, որ այդ խորանարդի հիմքի վրա քառակուսի միլիմետրը տեղավորվում է 25^2, այսինքն՝ 625 անգամ, իսկ խորանարդի մեջ խորանարդ միլիմետրը՝ 25^3, այսինքն՝ 15625 անգամ: Ուրեմն՝ կարող ենք ասել, որ տրված խորանարդի ծավալը 15625 մմ^3 է, այսինքն՝ $V = a^3 = 15625$ մմ^3: Այժմ հաշվի առնելով, որ 1000 մմ^3 = 1 սմ^3, նույն ծավալի համար ստանում ենք նաև $V = 15{,}625$ սմ^3 = (2,5 սմ)^3: Իսկ սա նշանակում է, որ տվյալ խորանարդի մեջ տեղավորվում են սմ^3–ը՝ 15 անգամ և սմ^3–ի հազարերորդ մասը՝ 625 անգամ:

Այսպիսով՝ ծավալն արտահայտող թվի հետ մեկտեղ նշվելու է նաև չափման միավորը, և այդ դեպքում հնարավոր է լինում կատարել անցում չափման մի միավորից մեկ այլ միավորի:

59. Ուղղանկյունանիստի ծավալը

Նկ. 106

Ենթադրենք, որ մեր տրամադրության տակ ունենք մեծ թվով փոքրիկ խորանարդներ, որոնցից յուրաքանչյուրի կողի երկարությունը e է, և, ուրեմն, ծավալը՝ e^3: Պատկերացնենք, որ այդ խորանարդները կողք կողքի՝ շարքերով, և իրար վրա՝ հարկերով, դասավորում ենք այնպես, որ ստացվի ուղղանկյունանիստ *(նկ. 106)*: Դիցուք՝ յուրաքանչյուր շարքում դասավորված խորանարդների թիվը եղել է m, շարքերի թիվը յուրաքանչյուր հարկում՝ n, իսկ հարկերի թիվը՝ k: Այդ դեպքում ուղղանկյունանիստի երեք չափումները կլինեն՝ $a = me$, $b = ne$, $h = ke$: Դժվար չէ համոզվել, որ յուրաքանչյուր հարկում տեղավորվել է mn թվով խորանարդ, իսկ ամբողջ ուղղանկյունանիստի մեջ՝ mnk թվով խորանարդ: Քանի որ յուրաքանչյուր խորանարդի ծավալը e^3 է, ուրեմն՝

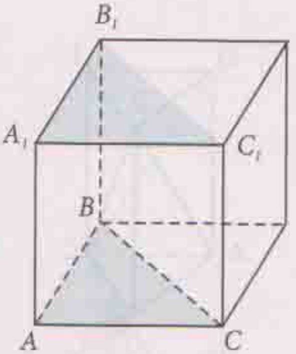
ուղղանկյունանիստի V ծավալը կլինի $mnke^3$ կամ, որ նույնն է, $V = mnke^3 = me \cdot ne \cdot ke = abh$: Այսինքն՝ *ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է նրա երեք չափումների արտադրյալին:* Եթե նկատի ունենանք, որ ab արտադրյալը ներկայացնում է ուղղանկյունանիստի հիմքի S_h մակերեսը, ապա կարող ենք ձևակերպել.

Ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է նրա հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին՝ $V = S_h h$: (1)

Պարզվում է, որ ավելի ճշգրիտ ապացուցումները նույնպես հանգեցնում են այդ նույն բանաձևին, և մենք կարող ենք օգտվել այդ բանաձևից a–ի, b–ի, h–ի ցանկացած արժեքների և համապատասխան չափման միավորի դեպքում:

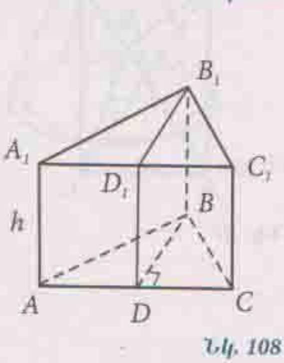
60. Ուղիղ պրիզմայի ծավալը

Պարզվում է, որ ինչպես և ուղղանկյունանիստի դեպքում, *ուղիղ պրիզմայի ծավալը ևս հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին:* Դրանում համոզվելու համար նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ պրիզմայի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Եթե այդ պրիզմային կցենք նրան հավասար ևս մեկ պրիզմա, ապա ստացվում է ուղղանկյունանիստ *(նկ. 107)*: Այդ դեպքում եռանկյուն պրիզմայի հիմքի S_{ABC} մակերեսը երկու անգամ փոքր է ուղղանկյունանիստի հիմքի մակերեսից, իսկ նրանց h բարձրությունները հավասար են: Ուրեմն՝ ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է $2S_{ABC}$ հիմքի մակերեսի և h բարձրության արտադրյալին: Եվ քանի որ ուղղանկյունանիստը կազմված է միմյանց հավասար երկու պրիզմաներից, ուրեմն յուրաքանչյուր պրիզմայի V ծավալը հավասար կլինի $2S_{ABC} \cdot h$ արտադրյալի կեսին, այսինքն՝ $V = S_{ABC} \cdot h$:



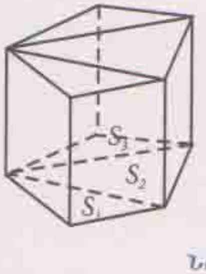
Նկ. 107

Նույնպիսի բանաձև է ստացվում նաև այն դեպքում, երբ պրիզմայի հիմքը կամայական եռանկյուն է: Իրոք, այդ դեպքում պրիզման կարող ենք տրոհել երկու այնպիսի պրիզմաների, որոնց յուրաքանչյուրի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Նկար 108–ում պատկերված է այդպիսի պրիզմայի տրոհումը (BD–ն հիմքի եռանկյան բարձրությունն է): Օգտվելով մակերեսների և ծավալների հիմնական հատկություններից՝ ստանում ենք.
$V = S_{ABD} \cdot h + S_{BCD} \cdot h = (S_{ABD} + S_{BCD}) \cdot h = S_{ABC} \cdot h$



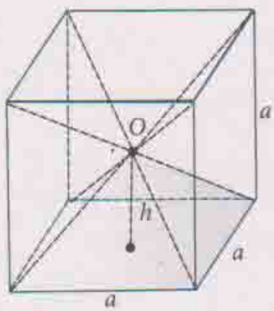
Նկ. 108

Այժմ արդեն կարող ենք համոզվել, որ ծավալի հաշվման բանաձևը ճիշտ է ցանկացած ուղիղ պրիզմայի համար: Իրոք, եթե պրիզմայի հիմքը n–անկյուն բազմանկյուն է, ապա այն կարելի է տրոհել $n-2$ հատ եռանկյուն պրիզմաների, որոնց բարձրությունները միմյանց հավասար են: Նկար 109–ում պատկերված է այդպիսի 5–անկյուն պրիզմայի տրոհումը: Պրիզմայի ծավալը հավասար է եռանկյուն պրիզմաների ծավալների գումարին. $V = S_1h + S_2h + S_3h = (S_1 + S_2 + S_3)h = Sh$, որտեղ S–ը սկզբնական պրիզմայի հիմքի մակերեսն է, իսկ S_1–ը, S_2–ը և այլն՝ տրոհումից ստացված եռանկյուն պրիզմաների հիմքերի մակերեսներն են, իսկ h–ը՝ պրիզմաների բարձրությունը:



Նկ. 109

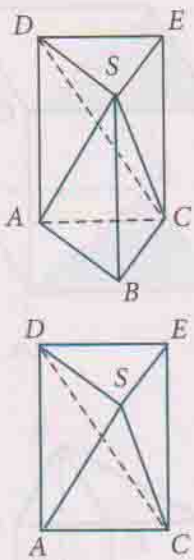
61. Բուրգի ծավալը



Նկ. 110 $h=\frac{1}{2}a$

Դիտարկենք a կող ունեցող խորանարդ և տանենք նրա անկյունագծերը *(նկ. 110)*: Արդյունքում խորանարդը տրոհվում է միմյանց հավասար վեց բուրգի: Դրանք կանոնավոր քառանկյուն բուրգ են, որոնց գագաթներն ընդհանուր են և համընկնում են խորանարդի անկյունագծերի հատման O կետին: Բուրգերից յուրաքանչյուրի հիմքը խորանարդի նիստերից մեկն է և ունի a^2 մակերես, իսկ յուրաքանչյուր բուրգի բարձրությունը[1] $\frac{a}{2}$ է: Քանի որ խորանարդը տրոհվում է վեց հավասար բուրգերի, ուրեմն՝ յուրաքանչյուր բուրգի ծավալը հավասար է խորանարդի ծավալի վեցերորդ մասին, այսինքն՝ հավասար է $\frac{a^3}{6}$:

Բայց $\frac{a^3}{6}=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{3}S\cdot h$, որտեղ S-ը բուրգի հիմքի մակերեսն է, h-ը՝ բարձրությունը: Այսպիսով՝ h բարձրություն և հիմքի a կող ունեցող կանոնավոր քառանկյուն բուրգի ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալի մեկ երրորդին: Պարզվում է, որ այդ նույն $V=\frac{1}{3}S\cdot h$ *բանաձևով է հաշվվում կամայական բուրգի ծավալը:* Համեմատության համար ասենք, որ եթե տրված են հիմքի նույն S մակերեսով ու նույն h բարձրությամբ պրիզմա և բուրգ, ապա այդ բուրգի ծավալը 3 անգամ փոքր է պրիզմայի ծավալից: Դա ակնառու պատկերացնելու համար դիտենք նկար 111-ը, որում $ABCDSE$ եռանկյուն պրիզման տրոհված է երեք բուրգերի՝ $SABC$, $SACD$ և $SCDE$: Բուրգերից վերջին երկուսի գագաթները համընկնում են, իսկ հիմքերը միմյանց հավասար ADC և EDC եռանկյուններն են, որոնց տրոհվել է $ADEC$ ուղղանկյունը: Դժվար չէ համոզվել, որ առաջին և երրորդ բուրգերը (եթե վերջինիս համար որպես գագաթ դիտենք C կետը, որպես հիմք՝ SDE եռանկյունը) նույնպես միմյանց հավասար բուրգեր են (դրանցից յուրաքանչյուրի հիմքը պրիզմայի հիմքերից մեկն է, իսկ գագաթը՝ մյուս հիմքի գագաթներից մեկը): Այսպիսով՝ պրիզման տրոհված է երեք՝ միմյանց հավասար մեծություններով բուրգերի, և, ուրեմն, դրանցից յուրաքանչյուրի ծավալը կազմում է պրիզմայի ծավալի մեկ երրորդը:



Նկ. 111

1. *Պարզաբանում:* Կանոնավոր բուրգի բարձրությունը այն հատվածն է, որը բուրգի գագաթը միացնում է հիմքի կենտրոնին: Կամայական բուրգի բարձրությունը հավասար է նրա գագաթի հեռավորությանը հիմքի հարթությունից: Մասնավորապես, եթե բուրգը տեղադրված է այնպես, որ նրա հիմքը գտնվում է հորիզոնական հարթության մեջ, ապա գործնականում բարձրությունը կարելի է որոշել բուրգի գագաթից ուղղալար կախելու միջոցով:

62. Գլանի և կոնի ծավալները

Նկ. 112

Գլանի և կոնի ծավալների հաշվման բանաձևերը ստացվում են պրիզմայի և բուրգի ծավալների համանմանությամբ:

ա) Գլանի ծավալը

Ասում են, որ պրիզման ներգծված է գլանին, եթե պրիզմայի հիմքերը ներգծված են գլանի հիմքերին *(նկ. 112)*: Հասկանալի է, որ այդպիսի պրիզմայի և գլանի բարձրությունները հավասար են:

Դիցուք՝ r շառավիղ և h բարձրություն ունեցող գլանին ներգծված է կանոնավոր n–անկյուն պրիզմա: Գլանին ներգծված այդպիսի յուրաքանչյուր պրիզմայի ծավալը գլանի ծավալի մոտավոր արժեքն է: Որքան մեծ է պրիզմայի հիմքի կողմերի n թիվը, այնքան ավելի ճշգրիտ է այդ մոտավոր արժեքը: Այժմ պատկերացնենք, որ ներգծված պրիզմայի հիմքի կողմերի թիվը շարունակաբար մեծացնում ենք: Ինչպես որ n թիվը անսահմանորեն մեծացնելիս n–անկյուն բազմանկյան մակերեսը «ձգտում է» շրջանի մակերեսին, այնպես էլ այս դեպքում պրիզմայի ծավալը «ձգտում է» գլանի ծավալին: Քանի որ պրիզմայի ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին, ուրեմն, համանման ձևով, *գլանի ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին:* Հաշվի առնելով, որ գլանի հիմքը r շառավիղով շրջան է, ստացվում է.

$$V = \pi r^2 h$$

բ) Կոնի ծավալը

Նկ. 113

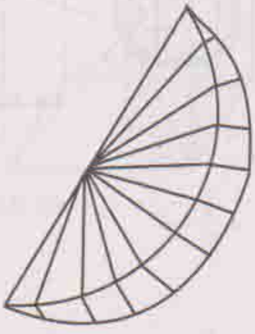
Այժմ պատկերացնենք r շառավիղով և h բարձրությամբ կոն, որին ներգծված է կանոնավոր n–անկյուն բուրգ, այսինքն՝ բուրգի հիմքի n–անկյուն բազմանկյունը ներգծված է կոնի հիմքի շրջանագծին, իսկ բուրգի և կոնի գագաթները համընկնում են *(նկ. 113)*: Հասկանալի է, որ այդպիսի կոնի և բուրգի բարձրությունները հավասար են: Կոնին ներգծված այդպիսի յուրաքանչյուր բուրգի ծավալը կոնի ծավալի մոտավոր արժեք է: Որքան մեծ է բուրգի հիմքի կողմերի n թիվը, այնքան ավելի ճշգրիտ է այդ մոտավոր արժեքը: Ինչպես որ n թիվը անսահմանորեն մեծացնելիս n–անկյուն բազմանկյան մակերեսը «ձգտում է» շրջանի մակերեսին, այնպես էլ բուրգի ծավալը «ձգտում է» կոնի ծավալին: Դրանից հետևում է, որ ինչպես բուրգի դեպքում, *կոնի ծավալը նույնպես հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալի մեկ երրորդին:* Հաշվի առնելով, որ կոնի հիմքը r շառավիղով շրջան է, ստացվում է.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

63. Գնդի ծավալը

Գնդի ծավալի բանաձևի արտածումը պահանջում է բավականին բարդ հաշվումներ, և մենք դրան չենք անդրադառնա: Ավելի ակնառու պատկերացում ունենալու համար նկարագրենք ծավալի բանաձևի արտածման մի մոտավոր եղանակ:

Պատկերացնենք, որ ձմերուկը գնդաձև է, և դուք այն մեջտեղից (որևէ տրամագծի երկայնքով) կտրատում եք շատ բարակ կտորների: Այնուհետև կտորներից յուրաքանչյուրը կենտրոնի ուղղությամբ դարձյալ կտրատում եք ավելի փոքր կտորների *(նկ. 114)*: Այդ ձևով ստացված յուրաքանչյուր փոքրագույն կտորը կարելի է նմանեցնել բուրգի, որի բարձրությունը հավասար է գնդի շառավղին, իսկ որպես հիմք է ծառայում կեղևից կտրված մասը (իհարկե, ճշգրիտ լինելու դեպքում պարտավոր էինք նկատել, որ բուրգի հիմք համարվող կեղևի այդ մասը հարթ պատկեր չէ, սակայն եթե կտորները շատ փոքր ենք վերցնում, կարող ենք այդ հարցը շրջանցել): Եթե փորձենք մտովի վերականգնել գունդը, ապա կտեսնենք, որ այն տրոհված է ընդհանուր գագաթ ունեցող (այդ գագաթը գնդի կենտրոնն է) փոքրագույն բուրգերի: Եթե գունդն այդ ձևով տրոհվում է n հատ փոքրագույն մասերի, ապա n մասի է տրոհվում նաև գնդային մակերևույթը (կեղևը): Ընդունենք, որ մակերևույթից հատած մասերի մակերեսները հավասար են $S_1, S_2, \ldots, S_n$: Պարզ է, որ $S_1 + S_2 + \ldots + S_n = 4\pi R^2$, որտեղ R–ը գնդի շառավիղն է: Գնդի ծավալը հավասար է տրոհված մասերի ծավալների գումարին: Հաշվի առնելով, որ այդ մասերն ընդունում ենք որպես R բարձրությամբ բուրգեր, ստացվում է.



Նկ. 114

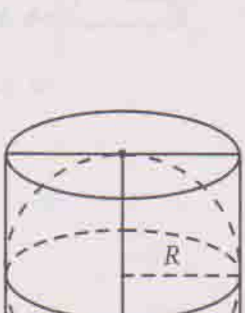
$$V = \frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + \ldots + \frac{1}{3}S_nR = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n)R =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3 :$$

Պարզվում է, որ ավելի ճշգրիտ հաշվումներով ևս ստացվել է նույն բանաձևը: Այսպիսով՝ R շառավիղով գնդի V ծավալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ծանոթություն: Պատկերացնենք, որ R շառավիղով և $2R$ բարձրությամբ գլանի մեջ կիպ տեղադրված է R շառավիղով գունդ *(այդ դեպքում ասում են, որ գունդը ներգծված է գլանին, այսինքն՝ գլանի ծնորդները և հիմքերի տրամագծերը շոշափում են գնդային մակերևույթը (նկ. 115))*:

Հույն գիտնական Արքիմեդը, որն ապրել է մ.թ.ա. 3–րդ դարում, բացահայտել է, որ այդ գնդի ինչպես ծավալը, այնպես էլ մակերևույթի մակերեսը կազմում են, համապատասխանաբար, գլանի ծավալի և լրիվ մակերևույթի մակերեսի $\frac{2}{3}$–ը:



Նկ. 115

Օգտվելով գնդի և գլանի մակերևույթների մակերեսների և ծավալների բանաձևերից՝ ինքներդ ևս կարող եք համոզվել դրանում:

Ուշագրավ է այն փաստը, որ գլանի ու գնդի այդ առնչությունն անքան է արժևորվել, որ Արքիմեդի գերեզմանաքարին, նրա ցանկությամբ, պատկերվել է գլանին ներգծված գնդի գծագիր:

Հարցեր և խնդիրներ

432 Ի՞նչ չափսեր պետք է ունենա խորանարդաձև ջրարանը, որպեսզի նրանում տեղավորվի 125 լիտր ջուր:

433. F մարմինը կազմված է P և Q մարմիններից, որոնց ծավալները համապատասխանաբար հավասար են V_1 և V_2: F մարմնի V ծավալն արտահայտեք V_1-ի և V_2-ի միջոցով, եթե՝ ա) P և Q մարմինները չունեն ընդհանուր ներքին կետեր, բ) P և Q մարմիններն ունեն ընդհանուր մաս, որի ծավալը հավասար է $\frac{1}{3}V_1$:

434. Բենզինի բաքն ունի ուղղանկյունանիստի ձև, որի չափսերն են 40 սմ, 60 սմ, 30 սմ: Նրա մեջ լցված է 32լ բենզին: Բաքի ո՞ր մասն է դատարկ:

435. Ուղղանկյունանիստի չափսերն են 8 սմ, 12 սմ և 18 սմ: Գտեք այն խորանարդի կողը, որի ծավալը հավասար է այդ ուղղանկյունանիստի ծավալին:

436. Ուղղանկյունանիստի հիմքը 4 սմ կողմով քառակուսի է, իսկ կողմնային նիստի անկյունագիծը 5 սմ է: Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալը:

437. Ուղղանկյունանիստի հիմքը 6 սմ և 9 սմ կից կողմերով ուղղանկյուն է, իսկ նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է 150 սմ^2: Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալը:

438. Գտեք կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի ծավալը, եթե հայտնի է, որ նրա կողմնային նիստերը 12 սմ կողմով քառակուսիներ են:

439. Սենյակի բարձրությունը 3 մ է, իսկ հատակն ու առաստաղն ունեն շեղանկյան ձև, որի անկյունագծերը հավասար են 6մ և 8մ: Գտեք սենյակի ծավալը: Որքա՞ն մեծ կլիներ այդ սենյակի ծավալը, եթե նրա պատերի չափերը մնային նույնը, սակայն հատակն ու առաստաղը լինեին քառակուսաձև:

440. Հյուսնին տվել էին ուղղանկյունանիստի ձև ունեցող փայտի երկու հավասար կտորներ, որպեսզի նա պատրաստեր երկու սեպ: Պատրաստելիս նա փայտի մի ծայրը թողնում էր անփոփոխ և աստիճանաբար բարակացնելով փայտը տաշում էր այնքան, որ մյուս ծայրը սուր լինի: Առաջին դեպքում նա փայտը տաշեց միայն մի կողմից, և ստացված սեպը նման էր պրիզմայի, որի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Երկրորդ դեպքում փայտը տաշեց երկու կողմից, և ստացված սեպը նման էր պրիզմայի, որի հիմքը հավասարասրուն եռանկյուն է: Պատրաստված ո՞ր սեպի ծավալն է ավելի մեծ: Փայտի ծավալի ո՞ր մասն է վերածվել տաշեղի: Պատասխանը հիմնավորեք:

441. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողը 10 սմ է, իսկ բուրգի բարձրությունը 9 սմ է: Գտեք բուրգի ծավալը:

442. Կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի բարձրությունը $4\sqrt{3}$ սմ է, ծավալը՝ 54 սմ^3: Գտեք այդ բուրգի հիմքի կողը:

443. Միհարկանի տունն ունի 3,2 մ բարձրություն, և անհրաժեշտ է, որ նրա կտուրը լինի բուրգաձև: Առաստաղից վերև որքա՞ն պետք է լինի կտուրի մեջտեղի բարձրությունը, որպեսզի տանիքի ծավալը 6 անգամ փոքր լինի տան ծավալից:

444. Գտեք այն գլանի ծավալը, որի բարձրությունը 4 մ է և հավասար է հիմքի տրամագծին:

445. 10 սմ կողմով քառակուսին պտտում են կողմերից մեկի շուրջը: Գտեք ստացված գլանի ծավալը:

446. 6 սմ և 8 սմ կից կողմերով ուղղանկյունը պտտում են մի դեպքում մեծ, մյուս դեպքում՝ փոքր կողմի շուրջը: Համեմատեք ստացված գլանների ծավալները:

447. Որքա՞ն պետք է լինի 40 սմ հաստություն (տրամագիծ) ունեցող գլանաձև գերանի երկարությունը, որպեսզի նրա ծավալը լինի 1 $մ^3$:

448. Գլանաձև ցիստեռնի ներքին տրամագիծը 1մ է, բարձրությունը՝ 2 մ: Այդպիսի քանի՞ ցիստեռն է հարկավոր 11000 լիտր բենզինը տեղավորելու համար:

449. Կոնի բարձրությունը 12 սմ է, ծավալը՝ 100π $սմ^3$: Գտեք կոնի հիմքի շառավիղը:

450. Գտեք այն կոնի ծավալը, որն առաջանում է, երբ 16 սմ և 12 սմ էջեր ունեցող ուղղանկյուն եռանկյունը պտտվում է մեծ էջի շուրջը:

451. Հարթ տեղանքում արկի պայթյունից առաջացել էր կոնաձև փոս, որի կենտրոնում խորությունը 2,5 մ է, իսկ փոսի վերին մասի լայնությունը (տրամագիծը) 8 մ է: Գտեք պայթյունի հետևանքով արտանետված հողային զանգվածի ծավալը:

452. Գտեք այն գնդի ծավալը, որի մակերևույթի մակերեսը 324π $սմ^2$ է:

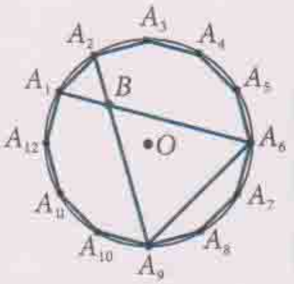
453. Գնդաձև ջրարանի մեջ տեղավորվում է մոտավորապես 113լ ջուր: Գտեք ջրարանի տրամագիծը:

454. Բաժակը կոնաձև է, որի խորությունը 10,5 սմ է, իսկ վերին մասում տրամագիծը՝ 5 սմ: Նրանով մատուցվել է երկու գդալ պաղպաղակ, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի 5 սմ տրամագծով կիսագնդի ձև: Եթե հալվի պաղպաղակը, արդյո՞ք կտեղավորվի բաժակում:

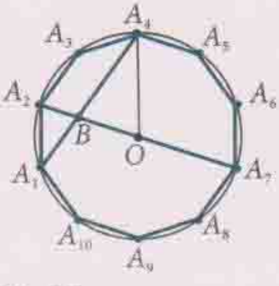
ԳԼՈՒԽ XI-Ի ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

1. Ինչպե՞ս են հաշվում զուգահեռագծի մակերեսը նրա կից կողմերով և դրանց կազմած անկյունով:
2. Ինչպես են հաշվում քառանկյան մակերեսը նրա անկյունագծերով և դրանց կազմած անկյունով:
3. Գրեք եռանկյան մակերեսի հաշվման՝ Հերոնի բանաձևը և արտածեք այն:

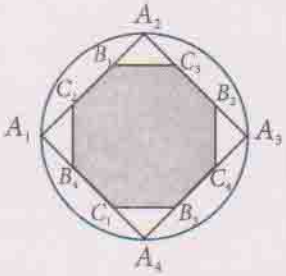
4. Գրեք և արտածեք այն բանաձևը, որով կապ է հաստատվում եռանկյան մակերեսի, կողմերի և արտագծյալ շրջանագծի շառավիղի միջև:
5. Արտածեք կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը հաշվելու բանաձևը՝ արտահայտված նրա պարագծի և ներգծյալ շրջանագծի շառավիղի միջոցով:
6. Արտածեք կանոնավոր n–անկյան կողմը և ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը հաշվելու բանաձևը՝ արտահայտված նրա արտագծյալ շրջանագծի շառավիղի միջոցով:
7. Արտագծյալ շրջանագծի շառավիղով ինչպե՞ս են արտահայտվում կանոնավոր եռանկյան, քառակուսու և կանոնավոր վեցանկյան կողմերը:
8. Բացատրեք, թե ինչպես են հաշվում ուղիղ պրիզմայի մակերևույթի մակերեսը:
9. Նկարագրեք, թե ինչ է կանոնավոր բուրգը, և ինչպես են հաշվում նրա մակերևույթի մակերեսը:
10. Արտածեք շրջանագծի երկարությունը հաշվելու բանաձևը:
11. Բացատրեք, թե որ թիվն է նշանակվում π տառով, և որքան է նրա մոտավոր արժեքը:
12. Արտածեք շրջանագծի աղեղի երկարությունը հաշվելու բանաձևը:
13. Արտածեք շրջանի մակերեսը հաշվելու բանաձևը:
14. Արտածեք շրջանային սեկտորի մակերեսը հաշվելու բանաձևը:
15. Բացատրեք, թե ինչ է սեգմենտը, և ինչպես են հաշվում նրա մակերեսը:
16. Ի՞նչ է ներկայացնում գլանի կողմնային մակերևույթի փռվածքը: Ի՞նչ բանաձևով է հաշվվում գլանի մակերևույթի մակերեսը:
17. Ի՞նչ է ներկայացնում կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքը: Ինչ բանաձևով է հաշվվում կոնի մակերևույթի մակերեսը:
18. Ի՞նչ բանաձևով են հաշվում գնդային մակերևույթի մակերեսը:
19. Ի՞նչն են համարում մարմինների ծավալների չափման միավոր: Ի՞նչ է ցույց տալիս ծավալն արտահայտող թիվը:
20. Ձևակերպեք ծավալների հիմնական հատկությունները:
21. Ի՞նչ բանաձևով է հաշվվում ուղղանկյունանիստի ծավալը:
22. Ի՞նչ բանաձևով է հաշվվում ուղիղ պրիզմայի ծավալը:
23. Ի՞նչ բանաձևով է հաշվվում բուրգի ծավալը:
24. Ի՞նչ է նշանակում՝ պրիզման ներգծված է գլանին, բուրգը ներգծված է կոնին:
25. Ի՞նչ բանաձևերով են հաշվում գլանի և կոնի ծավալները:
26. Ի՞նչ բանաձևով են հաշվում գնդի ծավալը:



Նկ. 116



Նկ. 117



Նկ. 118

455. Զուգահեռագծի սուր անկյունը 60° է: Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը, եթե նրա կողմերի տարբերությունը 16 սմ է, իսկ փոքր անկյունագիծը հավասար է19 սմ:

456. Շրջանագծին ներգծած է քառանկյուն, որի երկու կից կողմերը միմյանց հետ կազմում են 60° անկյուն և ունեն 7 սմ, 15 սմ երկարություն: Գտեք քառանկյան մյուս երկու կողմերը, եթե նրանց տարբերությունը 1 սմ է:

457. Զուգահեռագծի սուր անկյունը 60° է, իսկ անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը կողմերից՝ 3 սմ և 4 սմ: Հաշվեք զուգահեռագծի մակերեսը:

458. ABC եռանկյան մեջ $AB = 10$ սմ, $\angle B = 74^\circ$, $\angle A = 26^\circ$: Ապացուցեք, որ $AC < 10$ սմ:

459. $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան մեջ հայտնի է, որ $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = a$: Գտեք AD-ն:

460. $ABCD$ քառանկյան մեջ $AB = CD = a$, $\angle BAD = \angle BCD = \alpha < 90^\circ$, $BC \neq AD$: Գտեք քառանկյան պարագիծը:

461. $ABCD$ հավասարասրուն սեղանի մեջ (AD-ն և BC-ն հիմքերն են) $\angle BCA = \beta$, $\angle CDA = \alpha$, $AD = m$: Գտեք սեղանի մակերեսը:

462. 3 դմ շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյան կողմի վրա կառուցված է քառակուսի: Գտեք այդ քառակուսուն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

463. Գտեք կանոնավոր եռանկյան և քառակուսու մակերեսների հարաբերությունը, որոնք միևնույն շրջանագծին՝ ա) ներգծած են, բ) արտագծած են:

464. Կանոնավոր տասներկուանկյան A_1A_6 և A_2A_9 անկյունագծերը հատվում են B կետում *(նկ. 116)*: Ապացուցեք, որ ա) A_1A_2B և A_6A_9B եռանկյունները հավասարակողմ են, բ) $A_1A_6 = 2r$, որտեղ r-ը կանոնավոր տասներկուանկյան ներգծյալ շրջանագծի շառավիղն է:

465. R շառավիղով շրջանագծին ներգծած $A_1A_2\ldots A_{10}$ կանոնավոր տասնանկյան A_1A_4 և A_2A_7 անկյունագծերը հատվում են B կետում *(նկ. 117)*: Ապացուցեք, որ՝ ա) $A_2A_7 = 2R$, բ) A_1A_2B-ն և BA_4O-ն նման և հավասարասրուն եռանկյուններ են, գ) $A_1A_4 - A_1A_2 = R$:

466. Կանոնավոր վեցանկյունը ներգծված է այն շրջանագծին, որով սահմանափակված շրջանի մակերեսը 36π սմ^2 է: ա) Գտեք այդ վեցանկյան կողմը և մակերեսը: բ) Գտեք շրջանի այն մասի մակերեսը, որն ընկած է վեցանկյունից դուրս:

467. $A_1A_2A_3A_4$ քառակուսին ներգծված է R շառավիղով շրջանագծին *(նկ. 118)*: Նրա կողմերի վրա նշված են ութ այնպիսի կետեր, որ $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = A_1C_1 = A_2C_2 = A_3C_3 = A_4C_4 = R$: Ապացուցեք, որ $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$

ութանկյունը կանոնավոր է, և այդ ութանկյան մակերեսն արտահայտեք R շառավիղով:

468. Տիեզերանավը Երկրի շուրջը շրջանային ուղեծրով կատարել է երկու պտույտ՝ այդ ընթացքում անցնելով 84152 կմ ճանապարհ: Երկրի մակերևույթից ի՞նչ բարձրության վրա է գտնվել տիեզերանավը, եթե Երկրի շառավիղը 6370 կմ է:

469. Գտեք շեղանկյանը ներգծած շրջանագծի երկարությունը, եթե՝ ա) շեղանկյան անկյունագծերն են 6 սմ և 8 սմ, բ) շեղանկյան կողմը a է, իսկ սուր անկյունը՝ α:

470. Անտառային տեղամասն ունի շրջանի ձև: Շարժվելով 4 կմ/ժ արագությամբ՝ անտառեզրով մեկ լրիվ պտույտ կատարելիս ծախսվում է 45 րոպեով ավելի շատ ժամանակ, քան անտառի ուղիղ մեջտեղով տրամագծի մի ծայրից մյուսն անցնելիս: Գտեք այդ տեղամասի անտառեզրի երկարությունը:

471. Կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած է շրջանագիծ: Ապացուցեք, որ այդ շրջանագծով սահմանափակված շրջանի և այդ բազմանկյան մակերեսների հարաբերությունը հավասար է շրջանագծի երկարության և բազմանկյան պարագծի հարաբերությանը:

472. Գտեք երկու այն շրջանների ընդհանուր մասի մակերեսը, որոնց շառավիղներն են 1 և $\sqrt{3}$, իսկ կենտրոնների հեռավորությունը՝ 2:

473*. AB-ն և CD-ն նույն շրջանագծի փոխուղղահայաց տրամագծեր են: D կետը վերցնելով որպես կենտրոն՝ գծված է DA շառավիղով AMB աղեղը (M-ը շրջանի ներքին կետ է): Ապացուցեք, որ լուսնյակի ձև ունեցող $AMBC$ պատկերի մակերեսը հավասար է ABD եռանկյան մակերեսին:

474*. Տրված են երկու շրջան: Կառուցեք մի շրջան, որի մակերեսը հավասար է տրված երկու շրջանների մակերեսների գումարին:

475. Գտեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի ծավալը, եթե՝ ա) $AC = 12$ սմ, բ) $DE = 1$ սմ, որտեղ E-ն AB կողի միջնակետն է:

476. Գտեք $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի ծավալը, եթե $AB = BC = m$, $\angle ABC = \varphi$ և $BB_1 = BD$, որտեղ BD-ն ABC եռանկյան բարձրությունն է:

477. Բուրգի բարձրությունը 2 սմ է, իսկ հիմքը զուգահեռագիծ, որի կից կողմերը 5 սմ ու 4 սմ են, և փոքր անկյունագիծը՝ 3 սմ: Գտեք բուրգի ծավալը:

478. Ալյումինե հաղորդալարի տրամագիծը 4 մմ է, իսկ նրա զանգվածը՝ 6,8 կգ: Գտեք հաղորդալարի երկարությունը (ալյումինի խտությունը 2,6 գ/սմ^3 է):

479. Կապարե խողովակի պատերի հաստությունը 4 մմ է, ներքին տրամագիծը՝ 13 մմ: Որքա՞ն է 25 մ երկարությամբ այդպիսի խողովակի զանգվածը (կապարի խտությունը 11,4 գ/սմ^3 է):

480. Գլանի բարձրությունը 12 սմ-ով մեծ է նրա շառավիղից, իսկ լրիվ մակերևույթի մակերեսը հավասար է 288π սմ^3: Գտեք գլանի բարձրությունը և հիմքի շառավիղը:

481. Գլանի կողմնային մակերևույթի փռվածքը քառակուսի է, որի անկյունագիծը d է: Գտեք գլանի՝ ա) հիմքի մակերեսը, բ) ծավալը:

482. Կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքը սեկտոր է, որի շառավիղը 9 սմ է, աղեղը՝ 120°: Գտեք կոնի հիմքի մակերեսը:

483. m կողմով հավասարակողմ եռանկյունը պտտվում է կողմերից մեկի շուրջը: Գտեք առաջացող մարմնի մակերևույթի մակերեսը և ծավալը:

484. Գունդը և գլանը ունեն հավասար ծավալներ, և գնդի շառավիղը հավասար է գլանի հիմքի շառավիղին: Գլանի բարձրությունն արտահայտեք գնդի շառավիղով:

485. Գլանաձև փորձանոթը, որի տրամագիծը 2,5 սմ է, մի որոշ չափով լցված է ջրով: Որքա՞ն կբարձրանա ջրի մակարդակը փորձանոթում, եթե նրա մեջ ընկղմվեն 1 սմ տրամագծով 4 միատեսակ գնդեր:

486. Երկրագնդի մակերևույթի $\dfrac{3}{4}$-ը ծածկված է ջրով: Քանի՞ քառակուսի կիլոմետր է կազմում ցամաքը (երկրագնդի շառավիղն ընդունել 6375 կմ):

487. Գունդը տեղավորված է խորանարդաձև տուփի մեջ, որի կողը հավասար է գնդի տրամագծին: Տուփի ծավալի ո՞ր տոկոսն է զբաղեցրել գունդը:

488. Ունենք հավասար տրամագծերով գունդ, գլան և կոն, ընդ որում՝ գլանի և կոնի բարձրությունները հավասար են տրամագծերին: Ցույց տվեք, որ՝ ա) այդպիսի գնդի ծավալը կրկնակի մեծ է կոնի ծավալից, բ) գլանի ծավալը հավասար է գնդի և կոնի ծավալների գումարին:

489. Փայտե խորանարդի բոլոր նիստերը ներկված են: Կողերը նշագծումով բաժանել են 3-ական հավասար հատվածների և այդ նշված կետերով խորանարդը սղոցով կտրատել են այնպես, որ ստացվել են միմյանց հավասար 27 խորանարդիկներ: Գտեք խորանարդիկների քանակը, որոնք ունեն՝ ա) ներկված 3 նիստ, բ) ներկված 2 նիստ, գ) ներկված 1 նիստ, դ) ներկված ոչ մի նիստ:
Դիտարկեք խնդիրը նաև այն դեպքերի համար, երբ կողերը բաժանել են 4-ական, 5-ական և ընդհանրապես՝ n-ական հատվածների:

ԴԺՎԱՐԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ VIII-Ի ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

490. $ABCD$ քառանկյան գագաթներն ունեն հետևյալ կոորդինատները՝ $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ և $D(x_4,y_4)$: Ապացուցեք, որ այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է լինում այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ և $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$:

491. Տրված են երկու կետեր՝ $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$: Ապացուցեք, որ C կետը, որը AB հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ (այսինքն՝ $\frac{AC}{CB} = \lambda$), ունի այնպիսի (x, y) կոորդինատներ, որոնք արտահայտվում են հետևյալ բանաձևերով՝ $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$:

492. Ֆիզիկայից հայտնի է, որ եռանկյունաձև համասեռ թիթեղի ծանրության կենտրոնը գտնվում է եռանկյան միջնագծերի հատման կետում: Գտեք այդպիսի թիթեղի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, եթե նրա գագաթներն ունեն (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) կոորդինատները:

493. ABC եռանկյան մեջ $AB = 9$ սմ, $BC = 12$ սմ: AM և BN միջնագծերը փոխուղղահայաց են: Գտեք AB-ն:

494. Հետևյալ դեպքերից յուրաքանչյուրի համար աբսցիսների առանցքի վրա գտեք այն M կետը, որից մինչև A և B կետերը եղած հեռավորությունների գումարը ստանում է փոքրագույն արժեք. ա) $A(2,3)$, $B(4,-5)$, բ) $A(-2,4)$, $B(3,1)$:

495. Գտեք $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ և $x^2 + y^2 = 1$ հավասարումներով տրված երկու շրջանագծերի հատման կետերը և հաշվեք նրանց ընդհանուր լարի երկարությունը:

496. Ապացուցեք վեկտորը թվով բազմապատկման հիմնական հատկությունները (կետ 14):

Լուծում: 1. Ապացուցենք, որ ցանկացած k, l թվերի և կամայական $\vec{a}$ վեկտորի համար տեղի ունի $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ հավասարությունը:

Եթե $\vec{a} = \vec{0}$, ապա այս հավասարության տեղի ունենալն ակնհայտ է: Ենթադրենք $\vec{a} \neq \vec{0}$, ստանում ենք. $|(kl)\vec{a}| = |kl||\vec{a}| = |k||l||\vec{a}| = |k||l\vec{a}| = |k(l\vec{a})|$

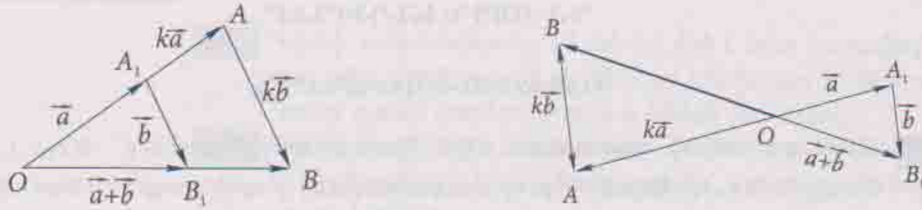
Այնուհետև, եթե $kl \geq 0$, ապա $(kl)\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ և $k(l\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$, իսկ եթե $kl < 0$, ապա $(kl)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ և $k(l\vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$: Թե՛ մեկ և թե՛ մյուս դեպքում $(kl)\vec{a} \uparrow\uparrow k(l\vec{a})$: Հետևաբար՝ $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$:

2. Ապացուցենք, որ ցանկացած k թվի և կամայական $\vec{a}$ ու $\vec{b}$ վեկտորների համար տեղի ունի $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ հավասարությունը: Եթե $k = 0$, ապա այդ հավասարության տեղի ունենալը ակնհայտ է: Ենթադրենք $k \neq 0$: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են ($\vec{a} \parallel \vec{b}$ դեպքը դիտարկեք ինքնուրույն):

Որևէ O կետից տեղադրենք $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}$ և $\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$ վեկտորները, իսկ A_1 և A կետերից՝ $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{b}$ և $\overrightarrow{AB} = k\vec{b}$ վեկտորները (*նկ. 119 (ա)(բ)*):

OA_1B_1 և OAB եռանկյունները նման են. նմանության գործակիցն է $|k|$: Հետևաբար՝ $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OB_1} = k(\vec{a} + \vec{b})$: Մյուս կողմից՝ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{a} + k\vec{b}$: Այսպիսով՝ $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$:

3. Ապացուցենք, որ ցանկացած kl թվերի և կամայական $\vec{a}$ վեկտորի համար տեղի ունի $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ հավասարությունը: Եթե $k = l = 0$, ապա այդ հավասարության տեղի



ա) $k>0$ $\overline{OB}=k(\overline{a}+\overline{b})=k\overline{a}+k\overline{b}$

բ) $k<0$ $\overline{OB}=k(\overline{a}+\overline{b})=k\overline{a}+k\overline{b}$

Նկ. 119

ունենալը ակնհայտ է: Ենթադրենք՝ k, l թվերից գոնե մեկը զրո չէ: Որոշակիության համար ընդունենք, որ $|k|\geq|l|$ և, ուրեմն, $k\neq 0$, $\left|\frac{l}{k}\right|\leq 1$: Դիտարկենք $\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}$ վեկտորը: Ակնհայտ է, որ $\left(\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}\right)\uparrow\uparrow\vec{a}$:

Այնուհետև՝ $\left|\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|+\frac{l}{k}\left|\vec{a}\right|=\left(1+\frac{l}{k}\right)\left|\vec{a}\right|$: Հետևաբար, ըստ վեկտորի ու թվի արտադրյալի սահմանման, $\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}=\left(1+\frac{l}{k}\right)\vec{a}$: Այս հավասարության երկու կողմը բազմապատկենք k թվով՝ ստանում ենք $k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$:

497. Տրված են $MNPQ$ քառանկյունը և O կետը: Ի՞նչ պատկեր է այդ քառանկյունը, եթե $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$:

498. Տրված են $ABCD$ քառանկյունը և O կետը: E, F, G, H կետերը O կետի համաչափն են, համապատասխանաբար, AB, BC, CD, DA կողմերի միջնակետերի նկատմամբ: Ի՞նչ պատկեր է $EFGH$ քառանկյունը:

499. Տրված է ABC եռանկյունը: Ապացուցեք, որ $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ վեկտորն ուղղված է A անկյան կիսորդի երկայնքով, իսկ $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}-\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ վեկտորը՝ A գագաթին հարակից արտաքին անկյան կիսորդի երկայնքով:

500. Ապացուցեք հետևյալ պնդումը. երեք՝ A, B, C կետեր գտնվում են մի ուղղի վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն այնպիսի k, l և m թվեր, որոնք միաժամանակ զրո չեն, և որոնց համար $k+l+m=0$, և կամայական O կետի համար տեղի ունի $k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ հավասարությունը:

501. Օգտվելով վեկտորներից՝ ապացուցեք, որ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածների հատման կետը և նրա անկյունագծերի միջնակետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

502. ABC եռանկյան A, B և C գագաթներին հարակից արտաքին անկյունների կիսորդները հատում են BC, CA և AB ուղիղները, համապատասխանաբար, A_1, B_1 և C_1 կետերում: Վեկտորների կիրառությամբ ապացուցեք, որ A_1, B_1 և C_1 կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

503. Դիցուք՝ H-ը անհավասար կողմերով ABC եռանկյան բարձրություններն ընդգրկող ուղիղների հատման կետն է, իսկ O-ն այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Օգտվելով վեկտորներից՝ ապացուցեք, որ եռանկյան միջնագծերի հատման G կետը գտնվում է HO հատվածի վրա և այդ հատվածը տրոհում է 2:1 հարաբերությամբ, այսինքն՝ $\frac{HG}{GO}=2$:

ԳԼՈՒԽ IX-Ի ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

504. ABC եռանկյան AC և BC կողմերի վրա վերցված են, համապատասխանաբար, M և K կետերը: AK և BM հատվածները հատվում են O կետում: Գտեք CMK եռանկյան մակերեսը, եթե OMA, OAB և OBK եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են S_1, S_2, S_3:

505. ABC եռանկյան AC և BC կողմերի վրա M և K կետերը, իսկ MK հատվածի վրա P կետը վերցված են այնպես, որ $\frac{AM}{MC}=\frac{CK}{KB}=\frac{MP}{PK}$: Գտեք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե AMP և BKP եռանկյունների մակերեսներն են S_1-ը և S_2-ը:

506. BC և AD հիմքերով $ABCD$ սեղանի անկյունագծերը հատվում են O կետում: BOC և AOD եռանկյունների մակերեսներն են S_1-ը և S_2-ը: Գտեք սեղանի մակերեսը:

507. Սեղանի հիմքերն են a-ն և b-ն: Հիմքերին զուգահեռ հատվածը, որի ծայրակետերը գտնվում են սրունքների վրա, սեղանի մակերեսը բաժանում է երկու հավասար մասերի: Գտեք այդ հատվածը:

508. $ABCD$ քառանկյան AC և BD անկյունագծերի միջնակետերով անցնող ուղիղը M և K կետերում հատում է AB և CD կողմերը: Ապացուցեք, որ DCM և AKB եռանկյունների մակերեսները հավասար են:

509. Երկու չհատվող հատվածները ուռուցիկ քառանկյան երկու հանդիպակաց կողմերից յուրաքանչյուրը բաժանում են երեք հավասար մասերի: Ապացուցեք, որ քառանկյան այն մասի մակերեսը, որն ընդգրկված է այդ հատվածների միջև, երեք անգամ փոքր է ամբողջ քառանկյան մակերեսից:

510. A կետն ընկած է $60°$-ի անկյան ներսում: A կետից մինչև անկյան կողմերը եղած հեռավորություններն են a և b: Գտեք A կետի հեռավորությունը անկյան գագաթից:

511. $ABCD$ զուգահեռագծի C գագաթով անցնող ուղիղը AB և AD ուղիղները հատում է K և M կետերում: Գտեք այդ զուգահեռագծի մակերեսը, եթե KBC և CDM եռանկյունների մակերեսներն են S_1-ը և S_2-ը:

512. $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետով տարված է ուղիղ, որը հատում է AB հատվածը M կետում, իսկ CD հատվածը՝ K կետում: K կետով տարված՝ AB-ին զուգահեռ ուղիղը BD-ն հատում է T կետում, իսկ M կետով տարված՝ CD-ին զուգահեռ ուղիղը AC-ն հատում է E կետում: Ապացուցեք, որ BE և CT ուղիղները զուգահեռ են:

513. ABC եռանկյան $(AB \neq AC)$ BC կողմի M միջնակետով տարված է A անկյան կիսորդին զուգահեռ ուղիղ, որը AB և AC ուղիղները հատում է, համապատասխանաբար, D և E կետերում: Ապացուցեք, որ $BD = CE$:

514. Ապացուցեք, որ սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հիմքերը միացնող հատվածներով առաջանում է մի եռանկյուն, որի կիսորդները գտնվում են այդ բարձրությունների վրա:

515. ABC եռանկյան AB կողմի վրա վերցված են E և F կետերն այնպես, որ E կետը գտնվում է AF հատվածի վրա, և $AE = BF$: E կետով տարված է AC կողմին զուգահեռ ուղիղ, իսկ F կետով՝ BC կողմին զուգահեռ ուղիղ, ընդ որում՝ այդ երկու ուղիղները հատվում են K կետում: Ապացուցեք, որ K կետը գտնվում է ABC եռանկյան AB կողմին տարված միջնագծի վրա:

516. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = \frac{180^\circ}{7}$ և $\angle B = \frac{360^\circ}{7}$: Ապացուցեք, որ $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$:

517 ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքի D միջնակետից տարված է BC կողմին ուղղահայաց՝ DH–ը: Դիցուք՝ M–ը DH հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ $BM \perp AH$:

518. ABC ուղղանկյուն եռանկյան C ուղիղ անկյան գագաթից տարված է ներքնաձիգին ուղղահայաց՝ CD–ն, իսկ D կետից տարված են AC և BC էջերին ուղղահայացներ՝ DE–ն և DF–ը: Ապացուցեք, որ՝ ա) $CD^3 = AB \cdot AE \cdot BF$, բ) $AE^2 + BF^2 + 3CD^2 = AB^2$,

գ) $\sqrt[3]{AE^2} + \sqrt[3]{AB^2} = \sqrt[3]{AB^2}$:

519. M կետը չի գտնվում $ABCD$ զուգահեռագծի կողմերն ընդգրկող ուղիղների վրա: Ապացուցեք, որ գոյություն ունեն N, P և Q կետեր՝ դասավորված այնպես, որ A–ն, B–ն, C–ն և D–ն համապատասխանաբար MN, NP, PQ և QM հատվածների միջնակետերն են:

520. $ABCD$ սեղանի անկյունագծերը հատվում են O կետում: ABO եռանկյունը, որի AB կողմը սեղանի փոքր հիմքն է, հավասարակողմ է: Ապացուցեք, որ այն եռանկյունը, որի գագաթները OA, OD և BC հատվածների միջնակետերն են, նույնպես հավասարակողմ է:

521. ABC եռանկյան A գագաթից տարված են AM և AK ուղղահայացներ այդ եռանկյան B և C գագաթներին հարակից արտաքին անկյունների կիսորդներին: Ապացուցեք, որ MK հատվածը հավասար է ABC եռանկյան կիսապարագծին:

522. AA_1, BB_1 և CC_1 հատվածները ABC եռանկյան գագաթները միացնում են հանդիպակաց կողմերի ներքին կետերին: Ապացուցեք, որ այդ հատվածների միջնակետերը չեն գտնվում մի ուղղի վրա:

523. Եռանկյան երեք բարձրությունների միջնակետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

524. ABC եռանկյան AC կողմը կրկնակի մեծ է BC կողմից: Տարված են այդ եռանկյան CM կիսորդը և C գագաթին հարակից արտաքին անկյան կիսորդը, որն AB ուղիղը հատում է K կետում: Ապացուցեք, որ $S_{BCM} = \frac{1}{2} S_{ACM} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{CMK}$:

525. ABC եռանկյան A գագաթով տարված է ուղիղ, որը BM միջնագիծը տրոհում է $1 : 2$ հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից, ընդ որում՝ այդ ուղիղը BC կողմը հատում է K կետում: Գտեք ABK և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

526. $ABCD$ զուգահեռագծի A գագաթով տարված է ուղիղ, որը BD, CD և BC ուղիղները հատում է, համապատասխանաբար, M, N և P կետերում: Ապացուցեք, որ AM հատվածը MN և MP հատվածների համեմատական միջինն է:

527. Կառուցեք հավասարասրուն սեղանի մեծ հիմքին պատկանող այն կետը, որի հեռավորությունը մինչև մի սրունքը n անգամ ավելի մեծ է, քան մինչև մյուս սրունքը ($n = 2,3,4$):

528. C կետն ընկած է AB հատվածի վրա: AB ուղղի վրա կառուցեք AB հատվածին չպատկանող D կետն այնպես, որ $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}$: Արդյոք միշտ լուծում ունի խնդիրը:

529. Կառուցեք եռանկյուն, եթե տրված են նրա երկու կողմը և դրանցով կազմված անկյան կիսորդը:

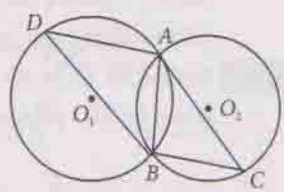
530. Կառուցեք ABC եռանկյունը, եթե տրված են $\angle A$-ն, $\angle C$-ն և մի հատված, որը հավասար է AC կողմի և BH բարձրության գումարին:

531. Կառուցեք եռանկյուն՝ ըստ տրված երեք բարձրության:

532. Կառուցեք սեղան՝ ըստ սրունքի, մեծ հիմքի, դրանցով կազմված անկյան և մյուս երկու կողմերի հարաբերության:

533. Կառուցեք տրված քառակուսուն հավասարամեծ շեղանկյունը, եթե հայտնի է, որ այդ շեղանկյան անկյունագծերի հարաբերությունը հավասար է տրված հատվածների հարաբերությանը:

534. AC ուղիղը O_1 կենտրոնով շրջանագծի շոշափողն է, իսկ BD ուղիղը՝ O_2 կենտրոնով շրջանագծի շոշափողը *(նկ. 120)*: Ապացուցեք, որ՝ ա) $AD \parallel BC$, բ) $AB^2 = AD \cdot BC$, գ) $BD^2 : AC^2 = AD : BC$:



Նկ. 120

535. Շրջանագիծը երկու հատվող ուղիղներից անջատում է հավասար լարեր, ընդ որում՝ այդ ուղիղների հատման կետը չի գտնվում շրջանագծի վրա: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղների հատման կետից մինչև մեկ և մյուս լարի ծայրակետերը եղած հեռավորությունները համապատասխանաբար հավասար են իրար:

536. Ապացուցեք, որ տրված շրջանագծի բոլոր AB լարերի համար $\frac{AB^2}{AD}$ մեծությունը, որտեղ AD-ն A կետի հեռավորությունն է B կետում տարված շոշափողից, ունի միևնույն արժեքը:

537. ABC հավասարակողմ եռանկյան ABC անկյան ներսում վերցված է M կետն այնպես, որ $\angle BMC = 30^\circ$, $\angle BMA = 17^\circ$: Գտեք BAM և BCM անկյունները:

538. ABC եռանկյան յուրաքանչյուր գագաթով տարված է ուղիղ, որն ուղղահայաց է եռանկյան այդ նույն գագաթով անկյան կիսորդին: Տարված ուղիղները հատվելիս առաջացնում են մի նոր եռանկյուն: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյան գագաթներն ընկած են ABC եռանկյան կիսորդներն ընդգրկող ուղիղների վրա:

539. BD հատվածը ABC եռանկյան կիսորդ է: Ապացուցեք, որ $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$:

540. Շրջանագծին ներգծված $ABCD$ քառանկյան A և B անկյունների կիսորդները հատվում են CD կողմի վրա գտնվող կետում: Ապացուցեք, որ $CD = BC + AD$:

541. Ապացուցեք, որ շրջանագծին արտագծված ուղղանկյուն սեղանի մակերեսը հավասար է հիմքերի արտադրյալին:

542. Ապացուցեք, որ շրջանագծին ներգծված ցանկացած քառանկյան անկյունագծերի արտադրյալը հավասար է հանդիպակաց կողմերի արտադրյալների գումարին (*Պտղոմեոսի* թեորեմը):

543. Ապացուցեք, որ ցանկացած եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի R շառավիղի, ներգծյալ շրջանագծի r շառավիղի և այդ շրջանագծերի կենտրոնների d հեռավորության համար տեղի ունի $d^2 = R^2 - 2Rr$ հավասարությունը (Էյլերի բանաձևը):

544. Անհավասար կողմերով ABC եռանկյան համար O կետը արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնն է, H–ը՝ AA_1, BB_1, CC_1 բարձրություններն ընդգրկող ուղիղների հատման կետը, A_2, B_2, C_2 կետերը AH, BH, CH հատվածների միջնակետերն են, իսկ A_3, B_3, C_3 կետերը՝ ABC եռանկյան կողմերի միջնակետերը: Ապացուցեք, որ A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 կետերը գտնվում են միևնույն շրջանագծի վրա (*Էյլերի* շրջանագիծը):

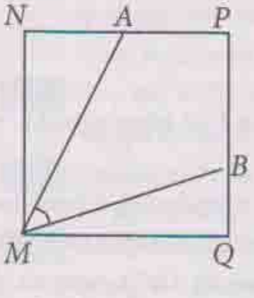
545. Ապացուցեք, որ եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի կամայական կետից այդ եռանկյան կողմերն ընդգրկող ուղիղներին տարված ուղղահայացների հիմքերը գտնվում են մի ուղղի վրա (*Սիմպսոնի* ուղիղը):

546. Կառուցեք եռանկյուն, եթե տրված են՝ ա)կողմը, նրա հանդիպակաց անկյունը և այդ կողմին տարված բարձրությունը, բ)անկյունը, այդ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը և պարագիծը:

547. Կառուցեք եռանկյուն, եթե տրված են արտագծյալ շրջանագիծն ու նրա վրա H, L և M կետերը, որոնցով անցնում են եռանկյան նույն գագաթից տարված բարձրությունը, կիսորդը և միջնագիծն ընդգրկող ուղիղները:

548. Տրված են մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետեր: Կառուցեք եռանկյուն, որի համար այդ կետերը կլինեն բարձրությունների հիմքերը: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

ԳԼՈՒԽ X-Ի ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ



Նկ. 121

549. $MNPQ$ քառակուսու կողմերի վրա վերցված են A և B կետերն այնպես, որ $NA = \frac{1}{2}MN$, $QB = \frac{1}{3}MN$ (*նկ. 121*): Ապացուցեք, որ $\angle AMB = 45^\circ$:

550. $ABCD$ քառանկյան AC և BD անկյունագծերը հատվում են O կետում: ODC եռանկյան մակերեսը համեմատական միջին է OBC և OAD եռանկյունների մակերեսներին: Ապացուցեք, որ $ABCD$–ն AD և BC հիմքերով սեղան է կամ զուգահեռագիծ:

551. Ապացուցեք, որ a, b, c, d (հաջորդական) կողմերով կամայական քառանկյան S մակերեսի համար տեղի ունի $S \le \frac{1}{2}(ac + bd)$ անհավասարությունը:

552. Ապացուցեք, որ ABC եռանկյան AA_1 կիսորդը հաշվվում է $AA_1 = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ բանաձևով, որտեղ $b = AC$, $c = AB$:

553. Շրջանագծին ներգծած քառանկյան անկյունագծերն արտահայտեք նրա կողմերով:

554. Ապացուցեք, որ եռանկյան կողմերը կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա այն և միայն այն դեպքում, երբ եռանկյան ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծերի կենտրոններով անցնող ուղիղը ուղղահայաց է նրա կիսորդներից որևէ մեկին:

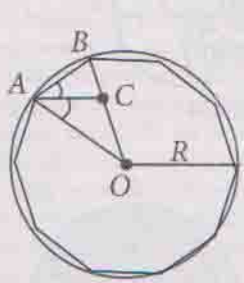
555. $ABCD$ ուղղանկյուն սեղանի AD փոքր հիմքը 3 է, իսկ հիմքերին ոչ ուղղահայաց CD սրունքը՝ 6: E կետը CD հատվածի միջնակետն է, իսկ CBE անկյունը հավասար է α: Գտեք $ABCD$ սեղանի մակերեսը:

556. ABC սուրանկյուն եռանկյան AB կողմը մեծ է BC կողմից, AM և CN հատվածները եռանկյան բարձրություններն են, իսկ O–ն արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնն է: ABC անկյունը β է, իսկ $NOMB$ քառանկյան մակերեսը՝ S: Գտեք AC կողմը:

557. Տրված են ABC եռանկյան h երկարությամբ AH բարձրությունը, l երկարությամբ AM միջնագիծը, AN կիսորդը: N կետը MH հատվածի միջնակետն է: Գտեք A գագաթի հեռավորությունը ABC եռանկյան բարձրությունների հատման կետից:

ԳԼՈՒԽ XI-Ի ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

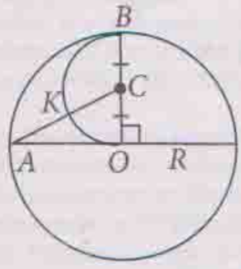
558. Ապացուցեք, որ շրջանագծին ներգծված քառանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ բանաձևով, որտեղ p–ն քառանկյան կիսապարագիծն է, իսկ a–ն, b–ն, c–ն և d–ն նրա կողմերն են:



Նկ. 122

559. Նկար 122–ում պատկերված է կանոնավոր տասնանկյուն՝ ներգծված R շառավիղով շրջանագծին: AC–ն OAB անկյան կիսորդն է: Ապացուցեք, որ՝ ա) $\Delta ABC\sim\Delta OAB$, բ) $AB=AC=OC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$:

560. Ապացուցեք, որ նկար 123–ում պատկերված AK հատվածը այն կանոնավոր տասնանկյան կողմն է, որը ներգծված է O կենտրոնով շրջանագծին:



Նկ. 123

561. $A_1A_2A_3A_4A_5$ կանոնավոր հնգանկյանը արտագծված է O կենտրոնով շրջանագիծ: ABC եռանկյան գագաթները հնգանկյան A_1A_2, A_2A_3 և A_3A_4 կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ տրված շրջանագծի O կենտրոնը և ABC եռանկյան ներգծյալ շրջանագծի O_1 կենտրոնը համաչափ են AC ուղղի նկատմամբ:

562*. Տրված շրջանագծին ներգծեք կանոնավոր տասնանկյուն:

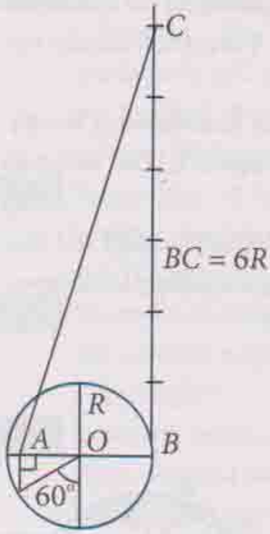
263*. Տրված շրջանագծին ներգծեք կանոնավոր հնգանկյուն:

564. Տրված շրջանագծին ներգծեք հնգաթև աստղ:

565. Դիցուք՝ M–ը կամայական կետ է, որն ընկած է կանոնավոր n–անկյան ներսում: Ապացուցեք, որ n–անկյան կողմերն ընդգրկող ուղիղներին M կետից տարված ուղղահայացների երկարությունների գումարը հավասար է nr, որտեղ r–ը ներգծյալ շրջանագծի շառավիղն է:

566. Եռանկյան անկյունները կազմում են 2 հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիա: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյան կողմերի միջնակետերը և բարձրությունների հիմքերը կարող են լինել կանոնավոր յոթանկյան վեց գագաթներ:

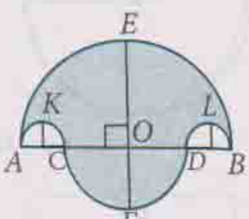
567. R շառավիղով շրջանագծին ներգծված են $ABCD$ քառակուսին և $A_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյունը: Ապացուցեք, որ $AB + A_1B_1$ գումարը $0{,}01R$ ճշգրտությամբ հավասար է կիսաշրջանագծի երկարությանը:



Նկ. 124

568. Ըստ նկար 124–ի տվյալների՝ ապացուցեք, որ AC հատվածի երկարությունը հավասար է O կենտրոնով և R շառավիղով շրջանագծի երկարությանը՝ $0{,}001R$ ճշգրտությամբ:

569. Նկար 125–ում պատկերված են չորս կիսաշրջան՝ AEB–ն, AKC–ն, CFD–ն, DLB–ն, ընդ որում՝ $AC = DB$: Ապացուցեք, որ ստվերագծված պատկերի մակերեսը հավասար է այն շրջանի մակերեսին, որը կառուցվում է EF տրամագծով:



Նկ. 125

570. Կառուցեք այն շրջանի եզրագիծը, որի մակերեսը հավասար է՝ ա) տրված երկու համակենտրոն շրջանագծերով սահմանափակված օղակի մակերեսին, բ) տրված կիսաշրջանի մակերեսին, գ) տրված այն շրջանային սեկտորի մակերեսին, որ սահմանափակված է $60°$ աղեղով:

571. Ուղղանկյուն եռանկյունը, որի մի սուր անկյունը α է և դրան կից էջը՝ a, պտտվում է այն ուղղի շուրջը, որը զուգահեռ է ներքնաձիգին և անցնում է ուղիղ անկյան գագաթով: Գտեք առաջացող մարմնի՝ ա) մակերևույթի մակերեսը, բ) ծավալը:

572. Սենյակը խորանարդաձև է: Սարդը, որը գտնվում է կողերից մեկի միջնակետում, ուզում է կարճագույն ճանապարհ անցնելով՝ բռնել սենյակի հեռավոր անկյուններից մեկում գտնվող ճանճին: Ի՞նչ հետագծով է շարժվելու սարդը:

573. $OABC$ եռանկյուն բուրգի (քառանիստի) բոլոր կողմնային նիստերի՝ O գագաթ ունեցող անկյունները ուղիղ անկյուններ են: Ապացուցեք, որ ABC նիստի մակերեսի քառակուսին հավասար է մյուս նիստերի մակերեսների քառակուսիների գումարին (*Պյութագորասի* տարածաչափական թեորեմը):

ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Երկրաչափության ուսումնասիրության ընթացքում մենք հիմնվում էինք մի շարք աքսիոմների վրա: Հիշենք, որ աքսիոմ են կոչվում երկրաչափության այն հիմնական դրույթները, որոնք ընդունվում են որպես ելակետային: Դրանք, այսպես կոչված, հիմնական հասկացությունների հետ մեկտեղ կազմում են այն հիմքը, որի վրա կառուցվում է ողջ երկրաչափությունը: Առաջին հիմնական հասկացությունները, որոնց մենք ծանոթացել ենք, «կետի» և «ուղիղ» հասկացություններն են: Հիմնական հասկացությունների սահմանումները չեն տրվում, սակայն նրանց հատկություններն արտահայտվում են աքսիոմների միջոցով: Օգտագործելով հիմնական հասկացություններն ու աքսիոմները՝ մենք սահմանում ենք նոր հասկացություններ, ձևակերպում և ապացուցում թեորեմներ և այդպիսով ուսումնասիրում ենք երկրաչափական պատկերների հատկությունները:

Նկատի ունենանք, որ հարթաչափության կառուցման համար անհրաժեշտ ոչ բոլոր աքսիոմներն են բերված մեր դասընթացում: Շարադրանքը չբարդացնելու համար դրանցից մի քանիսը մենք չենք ձևակերպել, թեև օգտագործել ենք: Ստորև կներկայացնենք հարթաչափության բոլոր աքսիոմները:

Առաջին երեք աքսիոմները բնութագրում են կետերի և ուղիղների փոխադարձ դասավորությունը:

1. *Յուրաքանչյուր ուղղի պատկանում է առնվազն երկու կետ*[1]*:*
2. *Գոյություն ունեն մի ուղղի վրա չգտնվող առնվազն երեք կետեր:*
3. *Ցանկացած երկու կետերով անցնում է ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:*

Մի ուղղի վրա գտնվող կետերի համար մենք օգտագործում ենք «միջև ընկած» հասկացությունը, որը դասում ենք երկրաչափության հիմնական հասկացությունների թվին: Այս հասկացության հատկությունն արտահայտվում է հետևյալ աքսիոմի միջոցով.

4. *Ուղղի երեք կետերից մեկը, ընդ որում՝ միայն մեկը, ընկած է մյուս երկուսի միջև:*

Ընդգծենք, որ ասելով՝ «B կետն ընկած է A և C կետերի միջև», մենք նկատի ունենք, որ A–ն, B–ն, C–ն ուղղի տարբեր կետեր են, և B կետն ընկած է նաև C և A կետերի միջև: Դա երբեմն այլ խոսքերով ասում ենք, որ A և B կետերն ընկած են C կետի միևնույն կողմում (նմանապես՝ B և C կետերն ընկած են A կետի միևնույն կողմում), կամ՝ A և C կետերն ընկած են B կետի տարբեր կողմերում:

5. *Ուղղի յուրաքանչյուր O կետն այն տրոհում է երկու մասի (ճառագայթների) այնպես, որ միևնույն ճառագայթի ցանկացած երկու կետեր ընկած են O կետի միևնույն կողմում, իսկ տարբեր ճառագայթների ցանկացած երկու կետեր՝ O կետի տարբեր կողմերում:*

Ընդունում ենք, որ այդ դեպքում O կետը չի պատկանում նշված ճառագայթներից թե՛ մեկին և թե՛ մյուսին:

Հիշենք, որ AB հատված կոչվում է այն երկրաչափական պատկերը, որը կազմված է A և B կետերից և AB ուղղի այն բոլոր կետերից, որոնք ընկած են A և B կետերի միջև: Հակիրճ կարելի է ասել այսպես. հատվածն ուղղի՝ երկու կետերով սահմանափակված մասն է: Եթե AB հատվածը a ուղղի հետ չունի ընդհանուր կետ, ապա ասում են, որ A և B կետերն ընկած են a ուղղի միևնույն կողմում: Եթե AB հատվածը հատում է a ուղիղը (A և B կետերի միջև ընկած որևէ C կետում), ապա ասում են, որ A և B կետերն ընկած են a ուղղի տարբեր կողմերում:

6. *Յուրաքանչյուր a ուղիղ տրոհում է հարթությունը երկու մասի (կիսահարթությունների) այնպես, որ միևնույն կիսահարթության ցանկացած երկու կետեր ընկած են a ուղղի միևնույն կողմում, իսկ տարբեր կիսահարթությունների ցանկացած երկու կետեր ընկած են a ուղղի տարբեր կողմերում:*

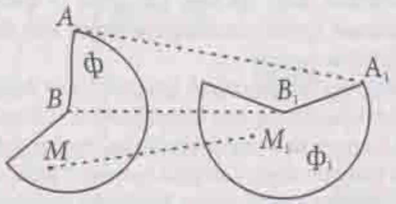
a ուղիղը կոչվում է նշված կիսահարթություններից յուրաքանչյուրի սահմանագիծ. նրա կետերը չեն պատկանում կիսահարթություններից թե՛ մեկին և թե՛ մյուսին:

Հաջորդ աքսիոմները վերաբերում են պատկերների վերադրման և հավասարության հասկացություններին: Վերադրման հասկացությունը մեր դասընթացում դասվում է երկրաչափության հիմնական հասկացությունների թվին: Երկրաչափական պատկերների հավասարությունը մենք սահմանել ենք՝ օգտագործելով վերադրման հասկացությունը: Այդ ընթացքում մենք հիմնվել ենք պատկերների վերադրման ակնառու պատկերացումների վրա և ընդունել ենք, որ ամեն մի երկրաչափական պատկեր կարելի է տեղաշարժել որպես մեկ ամբողջություն՝ նյութական մարմինների տեղաշարժման նմանությամբ: Սակայն երկրաչափական պատկերները նյութական մարմիններ չեն, այլ մտքով երևակայված առարկաներ, և, ուրեմն, դրանց վերադրումը հարկավոր է հասկանալ հատուկ իմաստով:

---

1. Մի շարք հասկացություններ, ինչպես, օրինակ՝ «պատկանելություն», «բազմություն», «թիվ» և այլն, վերաբերում են ոչ միայն երկրաչափությանը, այլև մաթեմատիկայի մյուս բաժիններին: Այդ առումով՝ մենք համարում ենք, որ դրանք հայտնի են, և չենք դասում հարթաչափության հիմնական հասկացությունների թվին:

Որպեսզի պարզաբանենք այդ իմաստը, նկատենք, որ ф պատկերը, մեր ակնառու պատկերացմամբ, իրեն հավասար $ф_1$ պատկերին վերադրելիս ф պատկերի յուրաքանչյուր կետ վերադրվում է $ф_1$ պատկերի ինչ-որ կետի: Այլ խոսքով՝ ф պատկերի յուրաքանչյուր կետ համադրվում է $ф_1$ պատկերի որևէ կետի: Սակայն ф պատկերի յուրաքանչյուր կետ $ф_1$ պատկերի որևէ կետի կարելի է համադրել նաև առանց ф-ը $ф_1$-ի վրա անմիջական վերադրման *(նկ. 126)*: Այդպիսի



Նկ. 126

համադրությունը կոչվում է ф պատկերի արտապատկերում $ф_1$ պատկերի վրա (այդ դեպքում հասկացվում է, որ $ф_1$ պատկերի յուրաքանչյուր կետ համադրված է ф պատկերի որևէ կետի): Անելով ф պատկերի վերադրում $ф_1$ պատկերի վրա՝ հասկանում ենք ф-ի արտապատկերումը $ф_1$-ի վրա: Ավելին՝ մենք կընդունենք, որ այդ դեպքում ոչ միայն ф պատկերի, այլև հարթության ցանկացած կետ արտապատկերվում է հարթության մի որոշակի կետի, այսինքն՝ *վերադրումը հարթության արտապատկերումն է ինքն իր վրա:*

Սակայն հարթության՝ ինքն իր վրա արտապատկերումներից բոլորը չեն, որոնց մենք կանվանենք վերադրում: Վերադրումները հարթության՝ ինքն իր վրա այնպիսի արտապատկերումն են, որոնք օժտված են աքսիոմներով արտահայտված հատկություններով (տորև տե՛ս 7–13 աքսիոմները): Որպեսզի ձևակերպենք այդ աքսիոմները, ներմուծենք «պատկերների հավասարություն» հասկացությունը: Դիցուք՝ ф-ը ու $ф_1$-ը երկու պատկերներ են: *Եթե գոյություն ունի այնպիսի վերադրում, որի դեպքում ф պատկերն արտապատկերում է $ф_1$ պատկերի վրա, ապա կասենք, որ ф պատկերը վերադրմամբ կարող է համընկնել $ф_1$ պատկերին, և կասենք, որ ф պատկերը հավասար է $ф_1$ պատկերին:* Այժմ ձևակերպենք աքսիոմներ՝ վերադրման հատկությունների մասին:

7. Եթե վերադրելիս երկու հատվածների ծայրակետերը համընկնում են, ապա համընկնում են նաև իրենք՝ հատվածները:

8. Ցանկացած ճառագայթի վրա նրա սկզբնակետից կարելի է տեղադրել տրվածին հավասար հատված, ընդ որում՝ միայն մեկը:

Դա նշանակում է, որ եթե տրված են որևէ AB հատված և O սկզբնակետով որևէ h ճառագայթ, ապա h ճառագայթի վրա գոյություն ունի, ընդ որում՝ միայն մեկ, այնպիսի C կետ, որ AB հատվածը հավասար է OC հատվածին:

9. Ցանկացած ճառագայթից տրված կիսահարթության մեջ կարելի է տեղադրել տրված չփռված անկյանը հավասար անկյուն, ընդ որում՝ միայն մեկը:

Դա նշանակում է, որ եթե տրված են որևէ OA ճառագայթ և ինչ-որ CDE չփռված անկյուն, ապա OA սահմանագծով կիսահարթություններից յուրաքանչյուրում գոյություն ունի, ընդ որում՝ միայն մեկ, այնպիսի OB ճառագայթ, որ CDE անկյունը հավասար է AOB անկյանը:

10. Ցանկացած hk անկյուն կարելի է վերադրմամբ համընկեցնել իրեն հավասար h_1k_1 անկյանը այնպես, որ՝

1) h ճառագայթը համընկնի h_1 ճառագայթին, իսկ k ճառագայթը՝ k_1 ճառագայթին,

2) h ճառագայթը համընկնի k_1 ճառագայթին, իսկ k ճառագայթը՝ h_1 ճառագայթին:

11. Ցանկացած պատկեր հավասար է ինքն իրեն:

12. Եթե ф պատկերը հավասար է $ф_1$ պատկերին, ապա $ф_1$ պատկերը հավասար է ф պատկերին:

13. Եթե $ф_1$ պատկերը հավասար է $ф_2$ պատկերին, իսկ $ф_2$ պատկերը՝ $ф_3$ պատկերին, ապա $ф_1$ պատկերը հավասար է $ф_3$ պատկերին:

Ինչպես երևում է, բերված բոլոր աքսիոմները համապատասխանում են պատկերների վերադրման և հավասարության մասին մեր ակնառու պատկերացումներին և այդ առումով կասկած չեն հարուցում:

Հաջորդ երկու աքսիոմները վերաբերում են հատվածների չափմանը: Նախքան դրանց ձևակերպելը հիշենք, թե ինչպես են չափվում հատվածները: Դիցուք՝ AB-ն չափման ենթակա հատվածն է, իսկ PQ-ն՝ հատվածների չափման միավորը: AB ճառագայթի վրա տեղադրենք AA_1 = PQ հատվածը, A_1B ճառագայթի վրա՝ A_1A_2 = PQ հատվածը, և այդպես շարունակ, քանի դեռ A_n կետը չի համընկել B կետին, կամ՝ B կետը չի հայտնվել A_n և A_{n+1} կետերի միջև: Առաջին դեպքում ասում են, որ AB հատվածի երկարությունը՝ ըստ PQ չափման միավորի արտահայտվում է n թվով (կամ՝ PQ հատվածը AB հատվածում տեղավորվում է n անգամ): Երկրորդ դեպքում կարելի է ասել, որ AB հատվածի երկարությունը՝ ըստ PQ չափման միավորի, մոտավորապես արտահայտվում է n թվով: Առավել ճշգրիտ չափելու համար PQ հատվածը բաժանում են հավասար մասերի, սովորաբար՝ 10, և այդ մասերից մեկի միջոցով չափում են նկարագրված A_nB մնացորդը: Եթե այդ դեպքում PQ հատվածի տասներորդ մասը չափվող մնացորդում ամբողջ թվով չի տեղավորվում, ապա այն, իր հերթին, բաժանվում է ևս 10 հավասար մասերի, և չափման ընթացքը շարունակվում է: Մենք ընդունում ենք, որ այդ եղանակով կարելի է ցանկացած հատված չափել, այսինքն՝ նրա երկարությունը, ըստ տրված չափման միավորի, արտահայտել վերջավոր կամ անվերջ տասնորդական կոտորակով: Այդ պնդումը հակիրճ կարելի է ձևակերպել այսպես.

14. Ցանկացած հատվածի երկարությունը՝ ըստ հատվածների չափման ընտրված միավորի, արտահայտվում է դրական թվով:

Բացի այդ, մենք ընդունում ենք տրված երկարությամբ հատվածի գոյության աքսիոմը:

15. Հատվածների չափման ընտրված միավորի դեպքում ցանկացած դրական թվի համար գոյություն ունի հատված, որի երկարությունն արտահայտվում է այդ թվով:

Հարթաչափության աքսիոմների համակարգը եզրափակում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը:

16. Տրված ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ:

Նշենք, որ երկրաչափությունը կարելի է կառուցել՝ օգտագործելով աքսիոմների տարբեր համակարգեր: Օրինակ՝ զուգահեռ ուղիղների աքսիոմի փոխարեն կարելի է որպես աքսիոմ ընդունել պնդումն այն մասին, որ եռանկյան անկյունների գումարը 180° է: Այդ դեպքում «Տրված ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ» պնդումն արդեն կարելի է ապացուցել իբրև թեորեմ (փորձեք ինքնուրույն կատարել այդպիսի ապացուցում): Աքսիոմների տարբեր համակարգերից ընդամենը պահանջվում է, որ դրանք լինեն համարժեք, այսինքն՝ հանգեցնեն միևնույն հետևություններին:

Երբեմն խնդիր է դրվում, որ աքսիոմները լինեն անկախ, այն է՝ նրանցից որևէ մեկը հնարավոր չլինի արտածել մյուսներից: Մենք մեր առջև այդպիսի խնդիր չենք դրել: Օրինակ՝ աքսիոմ 5–ի պնդումը կարելի է ապացուցել՝ ելնելով մյուս աքսիոմներից: Փաստորեն, դա նշանակում է, որ այդ պնդումը թեորեմ է, այլ ոչ թե աքսիոմ: Մինչդեռ շարադրանքի պարզության նպատակով մենք այն ընդունել ենք իբրև աքսիոմ:

Որպես եզրափակում՝ դիտարկենք մեր դասընթացի ամենաառաջին թեորեմներից մեկը, որն արտահայտում է եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշը: Մենք այն ապացուցել ենք՝ հիմնվելով պատկերների վերադրման և հավասարության մասին մեր ակնառու պատկերացումների վրա, երբ դեռ աքսիոմի հասկացությունը ներմուծված չէր: Վերհիշենք այդ ապացուցումը և այն դիտենք մեր ընդունած աքսիոմների տեսանկյունից:

Պետք էր ապացուցել, որ եթե $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ և $\angle A = \angle A_1$, ապա ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները հավասար են: Այդ նպատակով դիտարկենք այնպիսի վերադրում, որի դեպքում A գագաթը համընկնում է A_1 գագաթին, իսկ ABC եռանկյան AB և AC կողմերը վերադրվում են համապատասխանաբար A_1B_1 և A_1C_1 ճառագայթների վրա: Այդ դեպքում մենք հիմնվում էինք ակներև այն փաստի վրա, որ այդպիսի վերադրում գոյություն ունի, քանի որ A և A_1 անկյունները հավասար են: Այժմ կարող ենք ասել, որ այդպիսի վերադրման գոյությունը բխում է աքսիոմ 10–ից: Այնուհետև մենք դատում էինք այսպես. քանի որ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, ապա AB կողմը համընկնում է A_1B_1 կողմին, իսկ AC կողմը՝ A_1C_1 կողմին, մասնավորապես՝ համընկնում են B և B_1 կետերը, C և C_1 կետերը: Իսկ ինչպե՞ս հիմնավորենք այդ փաստը՝ հիմնվելով աքսիոմների՝ վրա: Շատ պարզ: Ըստ աքսիոմ 8–ի՝ A_1B_1 ճառագայթի վրա A_1 կետից կարելի է տեղադրել AB հատվածին հավասար միայն մեկ հատված: Բայց ըստ պայմանի՝ $AB = A_1B_1$: Ուրեմն՝ այդ վերադրման դեպքում B կետը համընկնում է B_1 կետին: Նույն կերպ հիմնավորվում է, որ C կետը համընկնում է C_1 կետին: Մնում է վկայակոչել աքսիոմ 7–ը, որպեսզի հիմնավորվի այն փաստը, որ BC կողմը համընկնում է B_1C_1 կողմին: Այժմ կարող ենք եզրակացնել, որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները լրիվ համընկնում են և, ուրեմն, նրանք հավասար են:

Ինչպես տեսնում ենք, եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշն արտահայտող թեորեմի բուն ապացուցումը, ըստ էության, չի փոխվում, միայն թե այժմ մենք հենվում ենք ոչ թե ակնառու թվացող փաստերի, այլ այն աքսիոմների վրա, որոնցով արտահայտվում են այդ փաստերը:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ VIII

1. ա) $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(0, 3)$, բ) $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$: **2.** ա) $0(0, 0)$, $A(6{,}5, 0)$, $C(6{,}5, 3)$, $B(0{,}3)$, բ) $0(0{,}0)$, $A(a{,}0)$, $C(a{,}b)$, $B(0{,}b)$: **3.** $M(3,-3)$, $N(3,3)$, $Q(-3,-3)$ կամ $M(3,-3)$, $N(-3, -3)$, $Q(3, 3)$: **4.** $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, h)$: **5.** $(7, -3)$: **7.** $C(10, -7)$, $D(7{,}5, -5)$: **8.** ա) 2, բ) 3, գ) $\sqrt{13}$: **9.** ա) 4, բ) 8, գ) 5, դ) 5: **10.** $\sqrt{82}+2\sqrt{17}+7\sqrt{2}$: **11.** ա) 2, բ) 3 կամ $-2{,}6$: **13.** ա) $(0, -9)$, բ) $(0{,}5)$: **14.** ա) $(-2{,}5, 0)$, բ) $(8, 0)$: **15.** ա) $MP = 3\sqrt{5}$, $NQ = 5$, բ) $MP = 4\sqrt{2}$, $NQ = 2\sqrt{2}$: **16.** *Ցուցում:* Ապացուցել, որ AC և BD հատվածները հավասար են, և դրանց միջնակետերը համընկնում են: ա) 8, բ) 17: **19.** 100 սմ, 100 սմ: *Ցուցում:* Կոորդինատային համակարգը ընտրել այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկար 4–ում: **20.** 13 սմ: *Ցուցում:* Կոորդինատային համակարգը ընտրել այնպես, որպեսզի եռանկյան հիմքը գտնվի Ox առանցքի վրա, իսկ բարձրությունը՝ Oy–ի: **21.** *Ցուցում:* Կոորդինատային համակարգը ընտրել այնպես, որպեսզի սեղանի հիմքերից մեկը գտնվի Ox առանցքի վրա, իսկ դրա ծայրակետերը լինեն համաչափ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ: **23.** *Ցուցում:* Կոորդինատային համակարգը ընտրել այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկար 6–ում, և ապացուցել, որ $b=0$: **25.** ա) A և C, բ) B, գ) B և D: **26.** ա) C, բ) B, գ) A և D: **28.** ա) $(-4; -3)$, $(-4; 3)$, բ) $(4; 3)$, $(-4; 3)$: **29.** ա) $(3; 0)$, $(3; 10)$, բ) $(-2; 5)$, $(8; 5)$: **30.** 1) $x^2 + y^2 = 9$, 2) $x^2 + y^2 = 2$, 3) $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$: **31.** ա) $x^2 + (y-5)^2 = 9$, բ) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$, գ) $(x+3)^2 + (y+7)^2 = \frac{1}{4}$, դ) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 100$: **32.** $x^2 + y^2 = 10$: **33.** ա) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 41$, բ) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$: **34.** $(x-5)^2 + y^2 = 25$, $(x+3)^2 + y^2 = 25$, երկու շրջանագիծ: **35.** $x^2 + (y-4)^2 = 25$: **37.** բ) $x + y - 7 = 0$, գ) $3x - 2y + 2 = 0$: **38.** $7x - y + 3 = 0$: **39.** ա) $x - y = 0$, $y - 1 = 0$, բ) $3x - 5y + 5 = 0$: **40.** $(3; -2)$: **41.** $x = 2$ և $y = 5$: **42.** 7: **43.** $5x + 2y - 10 = 0$, $5x - 2y - 10 = 0$: $5x + 2y + 10 = 0$, $5x - 2y + 10 = 0$ կամ $2x + 5y - 10 = 0$, $2x + 5y + 10 = 0$, $2x - 5y - 10 = 0$, $2x - 5y + 10 = 0$: **44.** Շրջանագծեր են ա), բ), դ), ե): **49.** բ) դեպքում: **51.** Արագություն, ուժ: **52.** $|\overrightarrow{AB}| = 3$ սմ, $|\overrightarrow{BC}| = 4$ սմ, $|\overrightarrow{DC}| = 3$ սմ, $|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{18{,}25}$ սմ, $|\overrightarrow{MA}| = 1{,}5$ սմ, $|\overrightarrow{CB}| = 4$ սմ, $|\overrightarrow{AC}| = 5$ սմ: **53.** $|\overrightarrow{BD}| = 13$ սմ, $|\overrightarrow{CD}| = 5\sqrt{2}$ սմ, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{74}$ սմ: **55.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) այո, դ) ոչ: **56.** ա) Ոչ, բ) այո, գ) ոչ, դ) ոչ, ե) այո: **58.** ա) Շեղանկյուն, բ) սեղան: **59.** ա) Այո, բ) այո, գ) ոչ, դ) ոչ, ե) այո: **60.** Այո: **67.** *Ցուցում:* Օգտվել եռանկյան անհավասարությունից: **69.** ա) a, բ) $a\sqrt{3}$, գ) $a\sqrt{3}$, դ) a, ե) a: **70.** ա) -2 և 10, բ) 14 և 10, գ) 14 և 10, դ) -2 և 10: **71.** ա) $\overrightarrow{AK}$, բ) $\overrightarrow{AM}$: **73.** $\overrightarrow{XY} = -\vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}$: **75.** $\overrightarrow{BM} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{NC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BN} = (\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a}$: **76.** $\overrightarrow{B_1C} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{x} - \vec{y}$, $\overrightarrow{BA} = -\vec{y}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{x} - \vec{y}$: **77.** ա) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, բ) $\overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b}$, գ) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}$: **78.** $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = -\vec{a} + \vec{b}$: **80.** $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$ հավասարությունը տեղի ունի, եթե $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$ կամ $\vec{x}$ և $\vec{y}$ վեկտորներից գոնե մեկը զրոյական է: **81.** $60°$: **91.** ա) $4\vec{n}$, բ) $\frac{5}{2}\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n}$, գ) $-\frac{4}{3}\vec{m} - \frac{2}{3}\vec{n}$: **92.** $\overrightarrow{EC} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AG} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$:

93. $\vec{AM}=\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{MD}=\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$: **94.** ա) $\vec{AC}=\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{AO}=\frac{1}{2}\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$, $\vec{CO}=-\frac{1}{2}\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$, $\vec{DO}=\frac{1}{2}\left(\vec{y}-\vec{x}\right)$, $\vec{AD}+\vec{BC}=2\vec{x}$, $\vec{AD}+\vec{CO}=\frac{1}{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$, $\vec{CO}+\vec{OA}=-\vec{x}-\vec{y}$, բ) $\vec{AM}=\frac{1}{3}\vec{x}$, $\vec{MC}=\frac{2}{3}\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{BM}=\frac{1}{3}\vec{x}-\vec{y}$, $\vec{OM}=-\frac{1}{6}\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{y}$: **96.** $\vec{AA_1}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, $\vec{BB_1}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{CC_1}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$:

97. $-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$: **100.** *Ցուցում*: Օգտվել խնդիր 95-ից: **103.** ա) -4, բ) $\frac{10}{3}$, գ) -1, դ) 5: **104.** ա) 2, բ) $\frac{1}{2}$, գ) $-\frac{1}{2}$, դ) 1, ե) -1, զ) $-\frac{1}{4}$, է) 3, ը) $-\frac{4}{3}$, թ), ժ) այդպիսի k թիվ գոյություն չունի: **105.** ա) Այո, բ) այո: **106.** *Ցուցում*: Ապացուցել հակասող ենթադրությամբ և օգտվել համագիծ վեկտորների վերաբերյալ լեմմից: **107.** $\vec{AM}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$: **108.** ա) $x=-1$, $y=3$, բ) $x=4$, $y=-5$, գ) $x=0$, $y=3$, դ) $x=-1$, $y=\frac{1}{3}$: **110.** ա) $\vec{a}\{2,3\}$, բ) $\vec{b}\{-2,3\}$, $\vec{c}\{2,0\}$, գ) $\vec{d}\{-2,-4\}$, $\vec{e}\{2,-2\}$, $\vec{f}\{-3,-5\}$: **111.** $\vec{a}\{2,3\}$, $\vec{b}\left\{-\frac{1}{2},-2\right\}$, $\vec{c}\{8,0\}$, $\vec{d}\{1,-1\}$, $\vec{e}\{0,-2\}$, $\vec{f}\{-1,0\}$: **112.** ա) $\vec{x}=-3\vec{i}+\frac{1}{5}\vec{j}$, բ) $\vec{y}=-2\vec{i}-3\vec{j}$, գ) $\vec{z}=-\vec{i}$, դ) $\vec{u}=-3\vec{j}$, ե) $\vec{v}=\vec{j}$: **113.** ա) $x=5$, $y=-2$, բ) $x=-3$, $y=7$, գ) $x=-4$, $y=0$, դ) $x=0$, $y=0$: **114.** ա) $\{5,7\}$ բ) $\{4,1\}$, գ) $\{1,1\}$, դ) $\{-1,0\}$: **115.** ա) $\{3,2\}$, բ) $\{6,0\}$, գ) $\{-1,9\}$, դ) $\{-7,-2\}$: **116.** $2\vec{a}\{6,4\}$, $3\vec{a}\{9,6\}$, $-\vec{a}\{-3,-2\}$, $-3\vec{a}\{-9,-6\}$: **117.** $\{-2,-4\}$, $\{2,0\}$, $\{0,0\}$, $\{2,3\}$, $\{-2,3\}$, $\{0,-5\}$: **118.** ա) 45°, բ) 90°, գ) 90°, դ) 90°, ե) 90°, զ) 135°, է) 0°: **119.** ա) 60°, բ) 120°, գ) 120°, դ) 90°, ե) 0°, զ) 180°: **120.** *Ցուցում*: Օգտվել երկու կետերի հեռավորության բանաձևից: **122.** *Ցուցում*: Նախ ապացուցել, որ $BC=AB$: 124. (5; 9): **125.** ա) $(-1; 9)$, $(0; 2)$, $(-4; 6)$, բ) $5\sqrt{2}$, գ) $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$: **127.** 40: **128.** *Ցուցում*: Կոորդինատային համակարգը ընտրել այնպես, որ AB և AD ճառագայթները հանդիսանան դրական կիսառանցքներ: **129.** $(x-3)^2+(y-5)^2=25$: **130.** ա) $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{2}$, բ) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$: **131.** ա) $3x+5y-4=0$, $2x-y-7=0$, $x+6y-23=0$, բ) $4x+11y-27=0$, $5x+4y-11=0$, $x-7y+16=0$, գ) $3x+5y-17=0$, $2x-y++6=0$, $x+6y-10=0$: **135.** *Ցուցում*: Եթե $\vec{x}$ և $\vec{y}$ վեկտորները տարագիծ են, օգտվել վեկտորների գումարման եռանկյան կանոնից, իսկ եթե համագիծ են՝ 134 խնդրից: **136.** $-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$: **137.** $\vec{XY}=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$, $\vec{MP}=-\vec{a}+\vec{b}$:

138. $\vec{CK}=\vec{a}$, $\vec{KD}=\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{BC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$: **143.** $\frac{3}{4}a$: **144.** *Ցուցում*: Օգտվել անկյան կիսորդի հատկությունից: **145.** ա) $-0{,}5$, բ) հնարավոր չէ, գ) -2, դ) 2: **146.** ա) $\vec{p}\{-8,13\}$, բ) $\vec{p}\{14,4\}$, գ) $\vec{p}\{-21,5\}$, դ) $\vec{p}\{6,-18\}$:

ԳԼՈՒԽ IX

147. $\frac{3}{4}$, ոչ: 148. ա) Այո, բ) այո, գ) ոչ: 149. 6,25 սմ: 150. 5 դմ: 151. 60 սմ: 153. 30 սմ: 154. Այո: 155. 8,4 սմ, 10,5 սմ, 14,7 սմ: 156. $\angle T = 20^\circ$, $\angle K = 40^\circ$, $\angle P = \angle M = 120^\circ$: 157. 22,5 սմ: 158. 6 սմ^2, 13,5 սմ^2: 159. $11\frac{3}{7}$ սմ: 162. $x = 9$, $y = 21$: 163. $BC = 4{,}8$, $DF = 1{,}6$, $DE = 1{,}1$: 167. ա) $EF = 5$ սմ, $FC = 3{,}5$ սմ, բ) $DE = 5\frac{5}{7}$ սմ, $EC = 2\frac{2}{7}$ սմ: 169. ա) 10 սմ, բ) $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{a}{b}$, գ) 12 սմ: 170. ա) Ոչ միշտ, բ) այո, գ) այո: 172. ա) Այո, բ) ոչ: 174. 4 սմ: 175. ա) 14 սմ, բ) 6 դմ: 176. 6 սմ և 6,5 սմ: 177. ա) 5 սմ, 5 սմ, 7,5 սմ, 7,5 սմ, բ) բոլոր չորս կողմերը հավասար են $\frac{ab}{a+b}$: 178. $BC = 1{,}2$ սմ, $AD = 3{,}6$ սմ: 180. ա) 17,5 սմ, բ) $BD = 5$ սմ, $DE = 6$ սմ, գ) 8 սմ: 181. *Ցուցում:* Եթե a և b ուղիղները զուգահեռ չեն, ապա A կետով տանել b ուղղին զուգահեռ ուղիղ: 182. Այո: 183. ա) Այո, բ) այո: 185. ա) 12 սմ, բ) 6 սմ, գ) 3 սմ: 186. 7,5 սմ, 9 սմ, 10,5 սմ: 188. 6,25: 190. 10 սմ, 20 սմ: 191. 96 սմ^2, 24 սմ^2: 192. 60 սմ: 193. 2,5 սմ: 194. 50 սմ^2: 195. $\frac{49}{25}$: 197. 1 մ, 2 մ, 2,5 մ: 198. 5,5 մ, 6,5 մ: 200. 8 սմ: 202. 7,5 սմ, 12 սմ: 203. 54 սմ^2: 204. 8 սմ: 206. 12 սմ, 16 սմ, 18 սմ կամ 9 սմ, 12 սմ, 13,5 սմ կամ 8 սմ, $\frac{32}{3}$ սմ, 12 սմ: 207. 3,2 սմ: 209. ա) $h = 20$, $a = 4\sqrt{41}$, $b = 5\sqrt{41}$, բ) $h = 48$, $a = 80$, $b = 60$, գ) $a = 12\sqrt{3}$, $c = 24$, $a_c = 18$, դ) $b = 8\sqrt{3}$, $c = 16$, $b_c = 12$, ե) $h = 2\sqrt{5}$, $b = 3\sqrt{5}$, $a_c = 4$, $b_c = 5$: 210. $a_c = \frac{a^2}{c}$, $b_c = \frac{b^2}{c}$: 211. *Ցուցում:* ա) Օգտվել եռանկյան մակերեսը հաշվելու բանաձևից, բ) օգտվել 210 խնդրից: 212. 32 մմ, 18 մմ: 213. 61 սմ: 214. $1\frac{12}{13}$ սմ, $11\frac{1}{13}$ սմ: 215. 18 սմ, 98 սմ: 216. 2 : 3: 217. ա) 15 սմ, բ) $10\frac{2}{3}$ սմ: 218. $BD = 8$ սմ, $DC = 12$ սմ: 219. $AB = 18$ սմ, $AC = 6$ սմ:

220. $NE = 3{,}5$ սմ, $EK = 2{,}5$ սմ: 221. 10 սմ: 222. ա) Այո, բ) ոչ, գ) ոչ, դ) այո: 223. $\frac{b}{a+c}$: 224. $AE = 6$ սմ, $EC = 4$ սմ, $DE = 6$ սմ: 225. $\frac{ab}{a+b}$: 226. ա) 17,5 սմ, բ) $BD = 5$ սմ, $DE = 6$ սմ, գ) 8 սմ: 227. ա) $\frac{1}{2}$, բ) $\frac{1}{4}$: *Ցուցում:* D կետով տանել BK–ին զուգահեռ ուղիղ: 228. ա) 12 դմ, բ) 18 դմ, գ) 3,4 մ: 229. ա) Այո, բ) այո, ոչ: 230. 2,4 մ, 3 մ: 231. 3,15 մ: 232. 6,936 մ: 233. 6,12 մ: 234. 2,5մ: 235. 48մ: 236. 72,25 մ: 239. *Ցուցում:* Նախ կառուցել որոնելի եռանկյանը նման եռանկյուն: 240. *Ցուցում:* Տե՛ս 239 խնդրի ցուցումը: 241. *Ցուցում:* Տե՛ս 239 խնդրի ցուցումը: 242. *Ցուցում:* Տե՛ս 239 խնդրի ցուցումը: 243. *Ցուցում:* Տես 239 խնդրի ցուցումը: 244. ա) 6 սմ, բ) 12 սմ, գ) 10 դմ: 245. 16 սմ: 246. ա) D կետը գտնվում է շրջանի ներսում, բ) D կետը գտնվում է շրջանագծի վրա, գ) D կետը գտնվում է շրջանից դուրս: 247. 21 դմ, 29 դմ: 248. 40 սմ: 249. Ոչ: 250. 24 մ: 251. 33 մ: 252. 8 սմ, 24 սմ: 253. ա) 6 սմ, բ) 3 դմ, գ) $\sqrt{3}$ մ: 254. 21 սմ: 255. 1,5 անգամ: 256. ա) $CD = 3$ սմ, բ) $AD = 18$ սմ, գ) $AB = 0{,}5(1 + \sqrt{5})a$: 257. 17 սմ: 258. 10 սմ: 259. 5 սմ, 3 սմ: 260. ≈226 կմ: 261. 13 սմ: 263. $A_1B_1 = 4{,}5$ սմ, $B_1C_1 = 6{,}75$ սմ:

264. 16,8 սմ, 14 սմ, $7\frac{7}{9}$ սմ: **266.** *Ցուցում:* Սկզբում ապացուցել, որ ա) $\Delta ABM\sim\Delta A_1B_1M_1$, բ) $\Delta ABH\sim\Delta A_1B_1H_1$: **271.** 288 սմ^2: **272.** 3 սմ: **275.** $\frac{7}{8}$: **276.** 18 սմ, 12 սմ: **277.** *Ցուցում:* Օգտվել եռանկյան կիսորդի հատկությունից: **278.** $DC = 2\frac{2}{3}$ սմ, $DB = 2\sqrt{13}$ սմ, $CB = \frac{2}{3}\sqrt{61}$ սմ: *Ցուցում:* Նախ ապացուցել, որ $\Delta ADC\sim\Delta BAD$: **279*.** $\frac{2ab}{a+b}$: **281.** *Ցուցում:* Օգտվել եռանկյան կիսորդի հատկությունից և BDM ու BAN, ինչպես նաև EMC ու ANC եռանկյունների նմանությունից, որտեղ M-ը BC-ի միջնակետն է, իսկ N-ը՝ կիսորդի հիմքը: **286.** $AB = \sqrt{a(a+b)}$, $CD = \sqrt{b(a+b)}$: **287.** 13 մ: **288.** 13,44 մմ: **289.** 1,1 մմ: **290.** ա) 1 : 1, բ) $r^2 - d^2$:

ԳԼՈՒԽ X

300. ա) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, բ) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, գ) $\sin\alpha = 0$: **301.** ա) $\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$, բ) $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$, գ) $\cos\alpha = \pm 1$: **302.** ա) $\mathrm{tg}\alpha = 0$, բ) $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, գ) $\mathrm{tg}\alpha = 1$, դ) $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$: **303.** $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1;$ $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$: **305.** ա) $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, բ) $A(0;\ 1,5)$, գ) $A(-2,5\sqrt{3};\ 2,5)$ դ) $A(-1,0)$, ե) $A(\sqrt{3},1)$: **306.** ա) 45°, բ) 90°, գ) 150°, դ) 135°: **309.** ա) $\sin\alpha < \sin\beta$, բ) $\sin\alpha > \sin\beta$: **310.** ա) $\cos\alpha > \cos\beta$, բ) $\cos\alpha > \cos\beta$: **311.** ա) $\mathrm{tg}\alpha < \mathrm{tg}\beta$, բ) $\mathrm{tg}\alpha < \mathrm{tg}\beta$: **312.** ա) $\sin 172^\circ, \sin 12^\circ, \sin 36^\circ$, բ) $\cos 95^\circ, \cos 64^\circ, \cos 34^\circ$, գ) $\mathrm{tg}30^\circ, 1, \mathrm{tg}70^\circ$: **313.** ա) $\angle A$-ն սուր անկյուն է, բ) $\angle A$-ն ուղիղ անկյուն է, գ) $\angle A$-ն բութ անկյուն է, դ) $\angle A$-ն սուր անկյուն է, ե) $\angle A$-ն բութ անկյուն է: **314.** ա) $3\sqrt{2}$, բ) 0, գ) $-3\sqrt{2}$: **315.** ա) $\frac{a^2}{2}$, բ) $-\frac{a^2}{2}$, գ) 0, դ) a^2: **316*.** ա) $\frac{1}{2}$ սմ^2, բ) $-\frac{1}{2}$ սմ^2, գ) 1 սմ^2, դ) 3 սմ^2: **317.** ա) $12\sqrt{6}$ սմ^2, բ) 27 սմ^2, գ) ≈ 36 սմ^2: **318.** 16 սմ: **319.** ա) $\frac{h_b h_c}{2\sin\alpha}$, բ) $\frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$: **320.** 1 սմ^2: **321.** $BC = 4$ սմ: **322.** $\frac{18}{7}\sin 2\alpha$ սմ^2: **323.** $4\sin\alpha$ սմ^2: **324.** $36\sqrt{3}$ սմ^2: **325.** ա) $\angle C = 80^\circ$, $a \approx 12,3$, $b \approx 9,1$, բ) $\angle B = 75^\circ$, $c \approx 4,5$, $a \approx 2,3$, գ) $\angle B \approx 37,989^\circ \approx 37^\circ 59'$, $\angle C \approx 62^\circ 01'$, $c \approx 14$, դ) $\angle A = 65^\circ$, $b \approx 19,2$, $c \approx 25,5$, ե) $\angle B = 37,317^\circ \approx 37^\circ 19'$, $\angle C \approx 82^\circ 41'$, $c \approx 11$, զ) $c \approx 5,7$, $\angle A = \angle B = 63^\circ$, է) $a \approx 53,84$, $\angle B = 36,296^\circ \approx 36^\circ 18'$, $\angle C = 56^\circ 42'$, ը) $\angle A \approx 42,833^\circ \approx 42^\circ 50'$, $\angle B \approx 60,941^\circ \approx 60^\circ 57'$, $\angle C \approx 76^\circ 13'$, թ) $\angle A = 54,883^\circ \approx 54^\circ 52'$, $\angle B \approx 84,270^\circ \approx 84^\circ 16'$, $\angle C \approx 40^\circ 52'$: **326.** $AB \approx 15$ սմ, $S_{ABC} \approx 87$ սմ^2: **327.** $AC = 6$ մ, $AB \approx 3$մ, $BC \approx 4$մ: **328.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}, \frac{a\sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma}$, որտեղ $\gamma = \frac{\alpha-\beta}{2}$, եթե $\alpha \geq \beta$ և $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{2}$, եթե $\beta > \alpha$: **329.** ա) Սուրանկյուն, բ) ուղղանկյուն, գ) բութանկյուն: **330.** 60° կամ $\approx 47^\circ 7'$:

331. 10 սմ: **332.** $AM = 7$: **333.** 8,125 սմ: **334.** $\sqrt{2}$: **335.** ≈ 52 մ: **336.** $\approx 14{,}5$ մ: **337.** 50 մ:
338. $BE = \frac{b}{2}$, $AD = \frac{b}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $AE = \frac{b}{2}\sqrt{3}$, $EC = \frac{b}{2}(2-\sqrt{3})$, $BC = b\sqrt{2-\sqrt{3}}$: **339.** ա) $\approx 6{,}254$ մ^2, բ) ≈ 6449073 մ^2: **340.** ա) $\angle C = 105°$, $AC \approx 6$ սմ, $BC \approx 4$ սմ, բ) $\angle A = 75°$, $BC \approx 6$ սմ, $AC \approx 4$ սմ, գ) $\angle C \approx 42°55'$, $\angle B \approx 88°35'$, $AC \approx 4$ սմ, դ) $\angle A \approx 26°22'$, $\angle C \approx 90°50'$, $AB \approx 11{,}7$ սմ: **341.** ա) $BC \approx 12$ սմ, $\angle C \approx 17°45'$, $\angle B \approx 27°15'$, բ) $AC = \sqrt{5}$ դմ, $\angle A \approx 71°34'$, $\angle C \approx 63°26'$, գ) $AB \approx 6{,}4$ դմ, $\angle A = 2°$, $\angle B \approx 28°$:
342. Ոչ: *Ցուցում:* Օգտվել սինուսների թեորեմից: **343.** Ոչ: **345.** $2\sqrt{7}$ սմ: **346.** $10\sqrt{\frac{3}{61}}$ սմ:
347. $\angle D \approx 117°10'$, $\angle E \approx 38°59'$, $\angle F \approx 23°51'$: **348.** $\frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\alpha}$: *Ցուցում:* Օգտվել եռանկյան մակերեսի բանաձևից:

ԳԼՈՒԽ XI

350. $72\sqrt{3}$ սմ^2: **351.** 4 սմ: **352.** $20\sqrt{3}$ սմ^2: **353.** 10 սմ: **354.** $4\frac{8}{13}$ սմ: **355.** 30°, 150°: **356.** 81 սմ^2:
357. $4\sqrt{3}$ սմ^2: **358.** 16,25 սմ: **359.** $13{,}5\sqrt{3}$ սմ^2: **363.** 256 սմ^2: **366.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$: **367.** 18 սմ, $9\sqrt{3}$ սմ^2:
368. 24 սմ, $24\sqrt{3}$ սմ^2: **369.** 1) $R = 3\sqrt{2}$, $r = 3$, $p = 24$, $S = 36$, 2) $R = 2\sqrt{2}$, $a_4 = 4$, $p = 16$, $S = 16$, 3) $r = 2\sqrt{2}$, $a_4 = 4\sqrt{2}$, $P = 16\sqrt{2}$, $S = 32$, 4) $R = 3{,}5\sqrt{2}$, $r = 3{,}5$, $a_4 = 7$, $S = 49$, 5) $R = 2\sqrt{2}$, $r = 2$, $a_4 = 4$, $P = 16$: **370.** 1) $r = 1{,}5$, $a_3 = 3\sqrt{3}$, $P = 9\sqrt{3}$, $S = \frac{27\sqrt{3}}{4}$, 2) $R = \frac{2}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$, $r = \frac{1}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$, $a_3 = 2\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$, $P = 6\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$, 3) $R = 4$, $a_3 = 4\sqrt{3}$, $P = 12\sqrt{3}$, $S = 12\sqrt{3}$, 4) $R = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{5\sqrt{3}}{6}$, $P = 15$, $S = \frac{25\sqrt{3}}{4}$, 5) $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $a_3 = 2$, $S = \sqrt{3}$: **372.** $2\sqrt{3}$ սմ: **373.** $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ սմ^2: **374.** $S_3 : S_4 : S_6 = \sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$: **375.** 3 : 4: **376.** $\sqrt{2}R^2$: **377.** ա) 108 սմ^2, բ) $18(\sqrt{3}+6)$ սմ^2: **378.** $6\sqrt{3}$ սմ^2:
379. $64\sqrt{3}$ սմ^2: **380.** 6 մ^2: **381.** 192 սմ^2: **382.** ա) 20π մ, բ) 30π մ, գ) 70π մ: **383.** ա) $\approx 15{,}9$ սմ, բ) $\approx 3{,}98$ սմ, գ) $\approx 7{,}56$ սմ: 384. 8π սմ: **385.** 1) 25,12, 2) 18,84, 3) 13,06, 4) 9, 5) 4,40, 6) 1, 7) 637,42, 8) 14,65, 9) 0,45: **386.** ա) կմեծանա երեք անգամ, բ) կփոքրանա երկու անգամ, գ) կմեծանա k անգամ, դ) կփոքրանա k անգամ: **387.** ա) Կմեծանա k անգամ, բ) կփոքրանա k անգամ: **388.** 25 սմ:
389. ա) πa, բ) $\pi c\left(\sqrt{2}-1\right)$, գ) $\pi c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)$, դ) $\frac{2\pi h \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$: **390.** 1,5 մ: **391.** ≈ 42013 կմ: **392.** 21°30':
393. 144°: **394.** $1\frac{1}{3}$ սմ: **395.** 7,2 սմ: **396.** $\frac{\pi a}{3}$, $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}a$, $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}a$: **398.** $\approx 36{,}2$ սմ: **399.** $\approx 4°35'$:
400. 1) 12,56, 2) 78,5, 3) 1,69, 4) 0,26, 5) 7, 6) 9258,26, 7) 9,42, 8) 1,41: **401.** ա) Կմեծանա k^2 ան-

գամ, բ) կփոքրանա k^2 անգամ: **402.** ա) $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4}$, բ) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}$, գ) $\frac{\pi(a^2+4h^2)^2}{64h^2}$: **403.** ա) $\frac{\pi a^2}{12}$, բ) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha+1)^2}$, գ) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$, դ) $\frac{\pi a^2}{4}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$: **404.** $D\approx 13{,}06$մ, $S\approx 133{,}89$մ^2: **405.** 4π սմ^2:

406. Փոքրագույն շրջանի մակերեսը՝ π, իսկ օղակների մակերեսները հավասար են՝ 3π, 5π, 7π:

408. ≈ 262 սմ^2: **409.** $\sqrt{\frac{3S}{\pi}}$: **410.** ա) $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{R^2}{2}$, բ) $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{R^2}{2}$, գ) $\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)\frac{R^2}{4}$, դ) $\left(\frac{\pi}{3}-1\right)\frac{R^2}{4}$:

411. ա) $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\frac{a^2}{3}$, բ) $\frac{\pi-2}{8}a^2$, գ) $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{a^2}{2}$: **412.** ա) $(\pi-2)R^2$, բ) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$, գ) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$:

413. $\frac{\pi a^2}{4}$: **414.** ա)132π սմ^2, 210π սմ^2, բ)6 սմ, 320π սմ^2, գ)4 սմ, 32π սմ^2, դ)3 սմ, 6 սմ: **415.** 336π սմ^2, 624π սմ^2: **416.** ա)հավասար են, բ)1–ինի մակերեսը փոքր է 24π սմ^2–ով: **417.** π^2մ^2: **418.** 11 տուփ:
419. $0{,}82\pi$մ$^2\approx 2{,}58$մ^2: **420.** $\frac{49}{\pi}$ սմ $\approx 15{,}6$ սմ: **421.** ա)54π սմ^2, 90π սմ^2, բ)6 սմ, 40π սմ^2, գ)7 սմ, 35π սմ^2, դ) 2 դմ, 3 դմ: **422.** ա)65π սմ^2, 90π սմ^2: **423.** ա)1–ինը փոքր է 5π սմ^2–ով, բ)1–ինը փոքր է 12π սմ^2–ով: **424.** 2 սմ, 12 սմ: **425.** 18πմ$^2\approx 56{,}52$ մ^2: **426*.** *Ցուցում:* Ստացված մարմնի մակերևույթը կազմված է երկու կոների կողմնային մակերևույթներից, կոների ծնորդները տրված եռանկյան էջերն են, իսկ շառավիղը՝ այդ եռանկյան ներքնաձիգին տարված բարձրությունը: 420π սմ^2: **427.** ա) 484π սմ^2, բ) 2,5 սմ, գ) 4 սմ, 64π սմ^2: **428.** 256π սմ^2: **430.** 432π սմ$^2\approx 1357$ սմ^2: **431.** ա) Կիսաշրջաններ են: բ) *Ցուցում:* Կեղևի մակերեսը գնդային մակերևույթի մակերեսի քառորդ մասն է, իսկ հատույթների ընդհանուր մակերեսը հավասար է մեծ շրջանի մակերեսին: Հավասար են: **432.** Յուրաքանչյուր կողը 50 սմ: **433.** ա)$V=V_1+V_2$, բ) $V=\frac{2}{3}V_1+V_2$: **434.** $\frac{5}{9}$ մասը: **435.** 12 սմ: **436.** 48 սմ^3: 437. 270 սմ^3:

438. $432\sqrt{3}$ սմ^3: **439.** 72 մ^3, 3 մ^3–ով: **440.** Հավասար են: Կեսը: **441.** 300 սմ^3: **442.** 9 սմ: **443.** 1,6 մ: **444.** 16πմ^3: **445.** 1000π սմ^3: **446.** Երկրորդ դեպքում ծավալը մեծ է 96π սմ^3–ով: 447. $\frac{25}{\pi}$ մ $\approx$ 8մ:

448. 7: **449.** 5 սմ: **450.** 768π սմ^3: **451.** ≈ 42մ^3: **452.** 972π սմ^3: **453.** ≈ 6 դմ: **454.** Այո: **455.** $52{,}5\sqrt{3}$ սմ^2:

456. 7 սմ, 8 սմ: **457.** $32\sqrt{3}$ սմ^2: **459.** $a\sqrt{2}$: **460.** $2a(1+\cos\alpha)$: **462.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$դմ: **463.** ա) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, բ) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$: **466.** ա) 6 սմ, $54\sqrt{3}$ սմ^2: **468.** 330 կմ: **469.** ա) $\approx 15{,}1$ սմ, բ) $\pi a\sin\alpha$: **470.** $\approx 4{,}4$ կմ: **472.** $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$:
473*. *Ցուցում:* Ցույց տալ, որ AB լարով սեգմենտի մակերեսը հավասար է AD և BD լարերով սեգմենտների մակերեսների գումարին: **474*.** *Ցուցում:* Օգտագործել Պյութագորասի թեորեմը:
475. ա) $432\sqrt{2}$ սմ^3, բ) $0{,}32\sqrt{5}$ սմ^3: **476.** $\frac{1}{2}m^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$: 477. 8 սմ^3: **478.** ≈ 208մ: **479.** ≈ 61 կգ:
480. 18 սմ, 6 սմ: **481.** ա) $\frac{d^2}{8\pi}$, բ) $\frac{d^3\sqrt{2}}{16\pi}$: **482.** 9π սմ^2: **483.** $\pi m^2\sqrt{3}$, $\frac{\pi m^3}{4}$: **484.** $H=\frac{4}{3}R$, որտեղ H–ը գլանի բարձրությունն է, R–ը՝ գնդի շառավիղը: **485.** Կբարձրանա $\frac{32}{75}$ սմ–ով:
486. $6375^2\pi$ կմ$^2\approx 1{,}28\cdot 10^8$ կմ^2: **487.** $\frac{50\pi}{3}\%\approx 52\frac{1}{3}\%$: **489.** ա) 8, բ) $12(n-2)$, գ) $6(n-2)^2$, դ) $(n-2)^3$:

ԴԺՎԱՐԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

490. *Ցուցում։* Օգտագործել AC և BD անկյունագծերի միջնակետերի կոորդինատները: **491.** *Ցուցում։* Օգտվել այն բանից, որ $\vec{AC}$ և $\vec{CB}$ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների հարաբերությունը հավասար է λ: **492.** $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$: *Ցուցում։* Օգտվել 491 խնդրից: **493.** $3\sqrt{5}$ սմ: *Ցուցում։* Որպես կոորդինատային առանցքներ վերցնել AM և BN ուղիղները: **494.** ա) $M\left(2\dfrac{3}{4}, 0\right)$, բ) $M(2,0)$: *Ցուցում։* Օգտվել այն բանից, որ եթե երկու կետերը գտնվում են աբսցիսների առանցքի տարբեր կողմերում, ապա այդ կետերը միացնող հատվածի և աբսցիսների առանցքի հատման կետը հենց որոնելին է: **495.** $(1{,}0)$, $(-0{,}6,\ 0{,}8)$, $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$; **497.** Զուգահեռագիծ: **498.** Զուգահեռագիծ: *Ցուցում։* Օգտվել հետևյալ խնդրից. C-ն AB հատվածի միջնակետն է, O-ն հարթության կամայական կետ է, $\vec{OC}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)$: **499.** *Ցուցում։* Հաշվի առնել, որ $\dfrac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$ և $\dfrac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ վեկտորների երկարությունները հավասար են: **500.** *Ցուցում։* Դիցուք՝ A, B և C կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա: Նախ ապացուցել, որ այդ դեպքում $\vec{AB}=n\vec{AC}$, որտեղ n-ը ինչ-որ թիվ է: Որպես k, l, m թվերը կարելի է վերցնել, օրինակ, $k=n-1$, $l=1$, $m=-n$: Հակադարձ պնդումն ապացուցելիս վերցնել A կետի հետ համընկնող O կետը: **501.** *Ցուցում։* Դիցուք՝ $ABCD$ քառանկյան մեջ E և F կետերը AC և BD անկյունագծերի միջնակետերն են, իսկ G-ն հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածների հատման կետն է: Օգտվելով հետևյալ խնդրից՝ «Կամայական քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները հատման կետով կիսվում են», կամայական O կետի համար $\vec{OE}$, $\vec{OF}$ և $\vec{OG}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ և $\vec{OD}$ վեկտորներով և օգտվել 500 խնդրից: **502.** *Ցուցում։* Օգտվել հետևյալ խնդրից. «ABC եռանկյան A անկյանը հարակից արտաքին անկյան կիսորդը BC ուղիղը հատում է D կետում: Այդ դեպքում $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}$ և 500 խնդրից»: **503.** *Ցուցում։* Դիցուք՝ A_1-ը, B_1-ը և C_1-ը ABC եռանկյան BC, CA և AB կողմերի միջնակետերն են: Օգտվելով այն բանից, որ $\vec{GA}=-2\vec{GA_1}$, $\vec{GB}=-2\vec{GB_1}$ և $\vec{GC}=-2\vec{GC_1}$, ապացուցել, որ $\vec{GH}=-2\vec{GO}$: **504.** $\dfrac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2-S_1\cdot S_3)}$: *Ցուցում։* Օգտվել «Եթե երկու եռանկյան բարձրությունները հավասար են, ապա մակերեսները հարաբերում են ինչպես հիմքերը» պնդումից: **505.** $(\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2})^3$: Օգտվել հավասար անկյուն ունեցող երկու եռանկյան մակերեսների հարաբերության վերաբերյալ թեորեմից: **506.** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$: *Ցուցում։* Նախ ապացուցել, որ $S_{AOB}=S_{COD}=\sqrt{S_1S_2}$: **507.** $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$: **508.** *Ցուցում։* Նախ ապացուցել, որ $S_{AKM}=S_{CMK}$ և $S_{BMK}=S_{DMK}$: **509.** *Ցուցում։* Ստացված երեք քառանկյուններից յուրաքանչյուրում տանել անկյունագծերն այնպես, որպեսզի ոչ մի երկու անկյունագիծ չունենան ընդհանուր ծայրակետ, և ապացուցել, որ երկու միջին եռանկյուններից յուրաքանչյուրի մակերեսը հավասար է համապատասխան եզրային եռանկյունների մակերեսների կիսագումարին: **510.** $2\sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$: *Ցուցում։* Դիցուք՝ AB-ն և AD-ն տրված 0 անկյան կողմերը պարունակող ուղիղներին տարված ուղղահայացներն են, իսկ C–ն AB և OD ուղիղների հատման կետն է: Դիտարկել ADC և OBC ուղղանկյուն եռանկյունները: **511.** $2\sqrt{S_1S_2}$: *Ցուցում*: Հաշվի առնել, որ BKC և MCD եռանկյուններն ունեն մեկական հավասար անկյուն, և օգտվել հավասար անկյուն ունեցող երկու եռանկյան մակերեսների հարաբերության վերաբերյալ թեորեմից: **512.** *Ցուցում*: Նախ ապացուցել, որ BEO և COT եռանկյունները նման են, որտեղ O–ն անկյունագծերի հատման կետն է (կամ՝ նախ ապացուցել, որ BTC և ETC եռանկյունների մակերեսները հավասար են): **513.** *Ցուցում*: Դիցուք՝ AK–ն ABC եռանկյան կիսորդն է, և օրինակ՝ $AC>AB$: Օգտվելով անկյան կիսորդի հատկությունից՝ նախ ապացուցել, որ M կետը գտնվում է K և C կետերի միջև: Այնուհետև օգտվել անկյան կողմերը զուգահեռ ուղիղների հատումից առաջացած հատվածների հատկությունից՝ նախապես ցույց տալով, որ $AD = AE$: **514.** *Ցուցում*: Օգտվել հետևյալ պնդումից. սուրանկյուն եռանկյան երկու բարձրությունների հիմքերը միացնող հատվածը եռանկյունից անջատում է իրեն նման եռանկյուն: **515.** *Ցուցում*: Նախ ապացուցել, որ $\Delta MBC \sim \Delta MFK$ և $\Delta MAC \sim \Delta MEK$, և ստանալ $FM = ME$, որտեղ M–ը CK և AB ուղիղների հատման կետն է: **516.** *Ցուցում*: Նախ ցույց տալ, որ $\angle B = 2\angle A$ և $\angle C = 2\angle B$, իսկ այնուհետև, տանելով BD և CE կիսորդները, ապացուցել, որ $\Delta ABC \sim \Delta BDC$ և $\Delta ABC \sim \Delta ACE$: **517.** *Ցուցում*: Օգտվել այն բանից, որ AH–ը BDH եռանկյանը նման եռանկյան միջնագիծն է: **518.** *Ցուցում*: ա) Դիտարկելով նման եռանկյունները՝ նախ ապացուցել, որ $AD^2 = AC \cdot AE$, $DB^2 = BC \cdot BF$ և $CD^2 = AD \cdot DB$, բ) կիրառել Պյութագորասի թեորեմը AED և DFB եռանկյունների նկատմամբ, գ) օգտվել AED և ACB, ինչպես նաև DBF և ABC եռանկյունների նմանությունից: **519.** *Ցուցում*: Օգտվել «Կամայական քառանկյան կողմերի միջնակետերը զուգահեռագծի գագաթներ են» պնդումից: **520.** *Ցուցում*: Օգտվել եռանկյան միջին գծի վերաբերյալ թեորեմից և հետևյալ պնդումներից. ա) «Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագիծը հավասար է ներքնաձիգի կեսին» և բ) «Հավասարասրուն սեղանի հիմքերի միջնակետերով անցնող ուղիղը ուղղահայաց է հիմքերին»: **521.** *Ցուցում*: Շարունակել AM և AK ուղղահայացները մինչև BC ուղղի հետ D և E կետերում հատվելը, և ապացուցել, որ MK–ն DAE եռանկյան միջին գիծն է, և DE–ն հավասար է ABC եռանկյան պարագծին: **522.** *Ցուցում*: Օգտվել «Եռանկյան գագաթը հանդիպակաց կողմի կամայական կետի հետ միացնող հատվածի միջնակետը գտնվում է մյուս երկու կողմերի միջնակետերը որպես ծայրակետեր ունեցող հատվածի վրա» պնդումից: **523.** *Ցուցում*: Օգտվել 522 խնդրից: **524.** *Ցուցում*: Դիցուք՝ N–ը AC–ի միջնակետն է: Նախ ապացուցել, որ MBC և MNC եռանկյունները հավասար են և BN–ը AKC եռանկյան միջին գիծն է: Այնուհետև օգտվել «Եթե երկու եռանկյան բարձրությունները հավասար են, ապա դրանց մակերեսները հարաբերում են ինչպես հիմքերը» պնդումից: **525.** $\frac{1}{5}$: **526.** *Ցուցում*: Օգտվել MND և MAB, MAD և MPB եռանկյունների նմանությունից: **527.** *Ցուցում*: Դիցուք՝ $ABCD$–ն հավասարասրուն սեղան է, իսկ X–ը՝ AD մեծ հիմքի որոնելի կետն է: AB–ն տրված սրունքն է: Նախ ապացուցել, որ $\frac{AX}{XD}=n$ և օգտվել հատվածը տրված հատվածներին համեմատական մասերի բաժանելու խնդրից: **528.** Լուծում: A սկզբնակետով կամայական ճառագայթի վրա տեղադրենք AC հատվածին հավասար AC_1 հատվածը, իսկ C_1A ճառագայթի վրա C_1 կետից տեղադրենք CB հատվածին հավասար C_1B_1 հատվածը (կատարեք գծագիրը): Համոզվեք այն բանում, որ C_1 կետով անցնող և BB_1–ին զուգահեռ ուղիղը AB ուղիղը հատում է որոնելի D կետում: Խնդիրը լուծում չունի, եթե C–ն AB հատվածի միջնակետն է: **529.** *Ցուցում*: Դիցուք՝ ABC–ն որոնելի եռանկյունն է, որի AB, AC կողմերը և AD կիսորդը տրված են: AD ուղղի վրա նշել E կետն այնպես, որ $BE \| AC$: Օգտվելով ADC և EDB եռանկյունների նմանությունից և անկյան կիսորդի հատկությունից, նախ կառուցել DE հատվածը, իսկ այնուհետև՝ ABE հավասարասրուն եռանկյունը՝ ըստ երեք կողմերի: **530.** *Ցուցում*: Նախ կառուցել որոնելի ABC եռանկյանը նման որևէ եռանկյուն: **531.** *Ցուցում*: Դիցուք՝ h_a–ն, h_b–ն, h_c–ն տրված բարձրություններն են: Օգտվել այն բանից, որ որոնելի եռանկյան a, b և c կողմերը համեմատական են h_b, h_a և $\frac{h_a h_b}{h_c}$ հատվածներին: **532.** *Ցուցում*: Դիցուք՝ $ABCD$–ն որոնելի սեղանն է, որի A անկյունը, AB սրունքը և AD մեծ հիմքը հայտնի են: Նախ կառուցել ABD եռանկյունը, այնուհետև՝ BCD եռանկյունը՝ ըստ B անկյան, BD կողմի և մյուս երկու կողմերի հարաբերության: **533.** *Ցուցում:* Նախ որոնելի շեղանկյան անկյունագծերը արտահայտել տրված քառակուսու կողմի և տրված հատվածների միջոցով: **534.** *Ցուցում:* Նախ ապացուցել, որ $\Delta ABC \sim \Delta BAD$: **535.** *Ցուցում:* Դիտարկել երկու դեպք. ուղիղների հատման կետը գտնվում է շրջանի ներսում, և շրջանից դուրս: Առաջին դեպքում օգտվել հատվող լարերի արտադրյալների վերաբերյալ թեորեմից: **536.** *Ցուցում:* Ապացուցել, որ այդ մեծությունը հավասար է տրված շրջանագծի տրամագծին: **537.** $146°$ և $107°$: *Ցուցում:* Նախ ապացուցել, որ M կետը գտնվում է A կենտրոնով և AB շառավիղով շրջանագծի վրա: **538.** *Ցուցում:* Նախ ապացուցել, որ տարված ուղիղներից նրանք, որոնք առաջացնում են նոր եռանկյուն, եռանկյան արտաքին անկյունների կիսորդներն են, և օգտվել անկյան կիսորդի համապատասխան հատկությունից: **539.** *Ցուցում:* Դիցուք՝ E կետը BD ճառագայթի և ABC եռանկյանը արտագծյալ շրջանագծի հատման կետն է: Օգտվել ABE և BCD եռանկյունների նմանությունից և հատվող լարերի հատկությունից: **540.** *Ցուցում:* Նշված կիսորդների հատման կետով տանել AB ուղղին զուգահեռ ուղիղ՝ մինչև AD և BC ուղիղների հետ E և F կետերում հատվելը և ապացուցել, որ $EF = DC$: **541.** *Ցուցում:* Դիցուք՝ $ABCD$–ն տրված սեղանն է, որը արտագծված է r շառավիղով շրջանագծին, իսկ $AD = a$, $BC = b$ դրա հիմքերն են: Նախ ապացուցել, որ $r = \dfrac{ab}{a+b}$: **542.** *Ցուցում:* $ABCD$ քառանկյան AC անկյունագծի վրա վերցնել K կետն այնպես, որ $\angle ABK = \angle CBD$, այնուհետև օգտագործել ABK և DBC, BCK և ABD եռանկյունների նմանությունը: **543.** *Ցուցում:* Ներգծյալ շրջանագծի M կենտրոնով տանել արտագծյալ շրջանագծի PQ տրամագիծը և սկզբում ապացուցել, որ $PM \cdot MQ = 2Rr$: **544.** *Ցուցում:* Ապացուցել, որ A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 կետերը գտնվում են OH հատվածի միջնակետում կենտրոն ունեցող և $\dfrac{R}{2}$ շառավիղով շրջանագծի վրա, որտեղ R–ը ABC եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի շառավիղն է: **545.** *Ցուցում:* Դիցուք՝ ABC–ն տրված եռանկյունն է, իսկ H, K, M կետերը արտագծյալ շրջանագծի AC աղեղին պատկանող D կետից AB, AC և BC ուղիղներից տարված ուղղահայացների հիմքերն են: Ենթադրենք, որ DK ճառագայթը գտնվում է HDM անկյան ներսում: Նախ ապացուցել, որ $\angle AKH = \angle ADH = \angle MDC = \angle MKC$: **546.** ա) *Ցուցում:* Նախ կառուցել տրված կողմով և հանդիպակաց անկյունով որևէ եռանկյուն, այնուհետև դրան արտագծել շրջանագիծ, իսկ հետո՝ կողմին տարված ուղղահայացի վրա տեղադրել բարձրությունն ու նրա ծայրով տանել կողմին զուգահեռ և օգտվել միևնույն աղեղի վրա հենված ներգծյալ անկյունների հավասարության փաստից: բ) *Ցուցում:* Դիցուք՝ ABC–ն որոնելի եռանկյունն է, $\angle B$–ն՝ տրված անկյունը: CA ճառագայթի շարունակության վրա տեղադրել $AA_1 = AB$ հատվածը, իսկ AC ճառագայթի շարունակության վրա՝ $CB_1 = BC$ հատվածը, և ցույց տալ, որ $\angle A_1BB_1 = 90° + \dfrac{B}{2}$: Օգտվելով խնդրի ա) դեպքից՝ նախ կառուցել A_1BB_1 եռանկյունը: **547.** *Ցուցում:* Դիցուք՝ PQR–ը որոնելի եռանկյունն է: P–ն այն գագաթն է, որից տարված են եռանկյան բարձրությունը, կիսորդը և միջնագիծը, իսկ O–ն՝ եռանկյանը արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը: Հաշվի առնել, որ $BO \perp QR$, իսկ BO–ի և PM–ի հատման կետը QK–ի միջնակետն է: **548.** Չորս լուծում: *Ցուցում:* Օգտվել 538 խնդրից: **549.** *Ցուցում:* Նշանակելով $MN = a$ նախ գտնել AMB եռանկյան մակերեսը և AM ու BM կողմերը: **550.** *Ցուցում:* Ապացուցել, որ ցանկացած $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան մեջ տեղի ունի $S_{ODC} \cdot S_{OAB} = S_{OBC} \cdot S_{OAD}$ (O–ն անկյունագծերի հատման կետն է): **551.** *Ցուցում:* Նախ ապացուցել պնդումը ուռուցիկ քառանկյան համար: Դրա համար տանել a և d կողմերի ընդհանուր ծայրակետը b և c կողմերի ընդհանուր ծայրակետի հետ միացնող անկյունագիծ և հաշվել ստացված եռանկյունների մակերեսները: **552.** *Ցուցում:* Օգտվել այն բանից, որ $S_{ABC} = S_{AA_1B} + S_{AA_1C}$: **553.** $\sqrt{\dfrac{a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad}{ad + bc}}$, $\sqrt{\dfrac{c^2ab + d^2ab + a^2dc + b^2dc}{ab + dc}}$, որտեղ a–ն, b–ն, c–ն, d–ն ներգծյալ քառանկյան կողմերն են: **554.** *Ցուցում:* Նախ ապացուցել, որ ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծերի կենտրոններով անցնող ուղիղը ուղղահայաց է կիսորդներից մեկին այն և միայն այն դեպքում, երբ ներգծյալ շրջանագիծը շոշափում է եռանկյան կողմերից մեկն այնպիսի կետում, որը հավասարահեռ է այդ կողմի միջնակետից և այդ կողմին տարված բարձրության հիմքից: **555.** 72sinαcos$^3\alpha$: **556.** $2\sqrt{S\mathrm{tg}\beta}$: **557.** $\dfrac{l^2-h^2}{2h}$: **558.** *Ցուցում* Օգտվել կոսինուսների թեորեմից, ապացուցել, որ a և b կողմերով անկյան սինուսը հավասար է $\dfrac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}$, որտեղ p–ն կիսապարագիծն է: **559.** *Ցուցում* Նախ գտնել և համեմատել BAC և AOB անկյունները: **560.** *Ցուցում* Օգտվել 559 խնդրից: **561.** *Ցուցում* Դիցուք՝ M–ը A_1A_4 հատվածի միջնակետն է: Ապացուցել, որ ACM եռանկյունը հավասարասրուն է, և օգտվելով դրանից՝ պարզել, որ հնգանկյանը արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը համընկնում է ACM եռանկյանը ներգծյալ շրջանագծի կենտրոնի հետ: **562*.** *Ցուցում* Օգտվել 560 խնդրից: **563*.** *Ցուցում* Օգտվել 562 խնդրից: **564.** *Ցուցում* Օգտվել 563 խնդրից: **565.** *Ցուցում* M կետը միացնել բազմանկյան գագաթների հետ և բազմանկյան մակերեսը ներկայացնել ստացված եռանկյունների մակերեսների գումարի տեսքով: **566.** *Ցուցում* Օգտվել 544 խնդրից: **571.** ա) $\pi a^2\mathrm{tg}\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha+2)$, բ) $\dfrac{2}{3}\pi a^3\sin\alpha\mathrm{tg}\alpha$: *Ցուցում* ա) Նկատել, որ մակերևույթը կազմված է հավասար շառավիղներով գլանի և երկու կոների կողմնային մակերևույթներից, բ) ծավալը ստանալ՝ գլանի ծավալից հանելով երկու կոների ծավալները: **572.** *Ցուցում* Օգտագործել խորանարդի մակերևույթի փռվածքը: **573.** *Ցուցում* Օգտվելով եռանկյան մակերեսի (երկու կողմով և նրանց կազմած անկյան միջոցով) բանաձևից և կոսինուսների թեորեմից՝ ABC եռանկյան մակերեսի քառակուսին արտահայտել կողմերի քառակուսիների միջոցով, իսկ այնուհետև օգտվել Պյութագորասի թեորեմից:

Թարգմանչի կողմից կատարված լրացումներ և փոփոխություններ

Թեմաներ՝ Գլուխ VIII-ի կետ 1, գլուխ IX-ի կետ 27, գլուխ XI-ի 46, 47, 50, 54, 59, 62, 63 կետերը

Խնդիրներ՝ 149–153, 156–161, 163–166, 168, 171–175, 178, 185–187, 188–208, 215, 216, 221–225, 228–230, 234, 244–262, 264, 282–293, 297, 307–313, 320–324, 330–334, 342–346, 353–364, 371, 372, 377–381, 388, 392–397, 410–412, 415–431, 432, 434–454, 472, 473, 477, 483, 484, 487–489, 571

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ VIII Կոորդինատներ և վեկտորներ

§ 1. ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ 3
1. Կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ 3
2. Հատվածի միջնակետի կոորդինատները 4
3. Կետերի հեռավորությունը կոորդինատներով 5
Խնդիրներ 6
Կոորդինատների մեթոդի կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս 7

§ 2. ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ԵՎ ՈՒՂՂԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ 9
4. Հարթության վրա գծի հավասարումը 9
5. Շրջանագծի հավասարումը 9
6. Ուղղի հավասարումը 10
Հարցեր և խնդիրներ 11

§ 3. ՎԵԿՏՈՐԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ 14
7. Վեկտորի հասկացությունը 14
8. Վեկտորների հավասարությունը 15
9. Վեկտորների տեղադրումը տրված կետից 16
Գործնական առաջադրանքներ 17
Հարցեր և խնդիրներ 18

§ 4. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ ԵՎ ՀԱՆՈՒՄԸ 19
10. Երկու վեկտորների գումարը 19
11. Վեկտորների գումարման օրենքները: Զուգահեռագծի կանոնը 20
12. Մի քանի վեկտորների գումարը 21
13. Վեկտորների հանումը 21
Գործնական առաջադրանքներ 22
Հարցեր և խնդիրներ 23

§ 5. ՎԵԿՏՈՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ ԹՎՈՎ: ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ 25
14. Վեկտորի և թվի արտադրյալը 25
15. Վեկտորների կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս 26
16. Գաղափար զուգահեռ տեղափոխման մասին 27
Գործնական առաջադրանքներ 28
Հարցեր և խնդիրներ 28
Վեկտորների կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս 29

§ 6. ՏԱՐԱԳԻԾ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ 31
17. Վեկտորի վերածումը ըստ երկու տարագիծ վեկտորների 31
18. Վեկտորի կոորդինատները 33
19. Վեկտորների կազմած անկյունը 34
Խնդիրներ 35
ԳԼՈՒԽ VIII-Ի ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ 37
Լրացուցիչ խնդիրներ 39

ԳԼՈՒԽ IX Նման եռանկյուններ

§ 1. ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ 42
20. Համեմատական հատվածներ 42
21. Նման եռանկյունների սահմանումը 42
Հարցեր և խնդիրներ 43

§ 2. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ 45
22. Եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը 45
23. Եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշը 45
24. Եռանկյունների նմանության երրորդ հայտանիշը 46
25. Եռանկյունների նմանության մի քանի կիրառություններ 47
Հարցեր և խնդիրներ 48

§ 3. ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ 51
26. Նման եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը 51
27. Նման եռանկյունների գծային տարրերի հարաբերությունը 52
28. Երկրաչափական պատկերների նմանության մասին 53
Հարցեր և խնդիրներ 54

§ 4. ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ 57
29. Համեմատական հատվածները ուղղանկյուն եռանկյան մեջ 57
30. Եռանկյան կիսորդի հատկությունը 58
31. Երկու ուղղի մի քանի զուգահեռ ուղիղներով հատումից առաջացած հատվածների համեմատականությունը 58
32. Եռանկյունների նմանության գործնական կիրառություններ 59
Հարցեր և խնդիրներ 92
Կառուցման խնդիրներ 65

§ 5. ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ՝ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՀԵՏ ՀԱՏՈՒՄԻՑ ԱՌԱՋԱՑԱԾ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ...66
33. Հատվող լարերի հատկությունը ...66
34. Շրջանագծի հատողի և շոշափողի հատկությունը ...66
Հարցեր և խնդիրներ ...67
ԳԼՈՒԽ IX-Ի ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ ...69
Լրացուցիչ խնդիրներ ...70

ԳԼՈՒԽ X Եռանկյունաչափական առնչություններ
§1. ԱՆԿՅԱՆ ՍԻՆՈՒՍԸ, ԿՈՍԻՆՈՒՍԸ ԵՎ ՏԱՆԳԵՆՍԸ ...74
35. Սինուս, կոսինուս, տանգենս ...74
36. Եռանկյունաչափական հիմնական նույնությունը ...75
37. Բերման բանաձևեր ...76
38. Կետի կոորդինատների հաշվման բանաձևերը ...77
39*. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը ...78
Հարցեր և խնդիրներ ...78

§2. ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ...81
40. Թեորեմ եռանկյան մակերեսի մասին ...81
41. Սինուսների թեորեմը ...81
42. Կոսինուսների թեորեմը ...82
43. Եռանկյունների լուծումը ...83
44. Չափողական աշխատանքներ ...84
Հարցեր և խնդիրներ ...85
ԳԼՈՒԽ X-Ի ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ ...87
Լրացուցիչ խնդիրներ ...88

ԳԼՈՒԽ XI Երկրաչափական մեծությունների հաշվումներ
§1. ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ ...89
45. Զուգահեռագծի մակերեսիհաշվման բանաձևը ...89
46. Քառանկյան մակերեսի բանաձևը ...89
47. Հերոնի բանաձևը ...90
48. Եռանկյան մակերեսի, կողմերի և արտագծյալ շրջանագծի շառավիղի կապը ...91
49. Կանոնավոր բազմանկյան մակերեսի, նրա կողմերի և ներգծյալ շրջանագծի շառավիղի հաշվման բանաձևեր ...92
50. Բազմանիստերի մակերևույթների մակերեսները ...93
Հարցեր և խնդիրներ ...95

§2. ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ ...98
51. Շրջանագծի երկարությունը ...98
52. Շրջանի մակերեսը ...99
53. Շրջանային սեկտորի մակերեսը ...100
54. Սեգմենտի մակերեսը ...101
Հարցեր և խնդիրներ ...102

§3. ԳԼԱՆԻ, ԿՈՆԻ ԵՎ ԳՆԴԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ...105
55. Գլանի մակերևույթի մակերեսը ...105
56. Կոնի մակերևույթի մակերեսը ...105
57. Գնդային մակերևույթի մակերեսը ...106
Հարցեր և խնդիրներ ...107

§4. ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ...109
58. Գաղափար մարմնի ծավալի մասին ...109
59. Ուղղանկյունանիստի ծավալը ...110
60. Ուղիղ պրիզմայի ծավալը ...111
61. Բուրգի ծավալը ...112
62. Գլանի և կոնի ծավալները ...113
63. Գնդի ծավալը ...113
Հարցեր և խնդիրներ ...115
ԳԼՈՒԽ XI-Ի ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ ...116
Լրացուցիչ խնդիրներ ...118

ԴԺՎԱՐԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ...121
ԳԼՈՒԽ VIII-Ի ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ...121
ԳԼՈՒԽ IX-Ի ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ...123
ԳԼՈՒԽ X-Ի ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ...126
ԳԼՈՒԽ XI-Ի ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ...127

ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ...129
ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ ...132

Լևոն Սերգեյի Աթանասյան, Վալենտին Ֆյոդորի Բուտուզով,
Սերգեյ Բորիսի Կադոմցև, Էդուարդ Հենրիկի Պոզնյակ,
Իրինա Իգորի Յուդինա

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Դասագիրք 12-ամյա հանրակրթական
դպրոցի 9-րդ դասարանի համար

Թարգմանությունը՝ *Սարիբեկ Էլիբեկի Հակոբյանի*

**Левон Сергеевич Атанасян, Валентин федорович Бутузов,
Сергей Борисович Кадомцев, Эдуард Генрихович Позняк,
Ирина Игоревна Юдина**

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 9-го класса
(на армянском языке)
Ереван "Зангак-97" 2008

Перевод: *Сарибека Элибековича Акопяна*

Հրատարակչության տնօրեն՝ Էմին Մկրտչյան
Գեղարվեստական խմբագիր՝ Արա Բաղդասարյան
Տեխնիկական խմբագիր՝ Նվարդ Փարսադանյան
Սրբագրիչ՝ Սերժ Մելքումյան
Համակարգչային ձևավորող՝ Արևիկ Հակոբյան
Համակարգչային մուտքագրող՝ Գոհար Խաչատրյան

Տպագրությունը օֆսեթ: Չափսը՝ 70x100 1/16
Թուղթը՝ օֆսեթ: Ծավալը՝ 9 տպ. մամուլ: Տպաքանակը՝ 55 000 օրինակ:

Печать офсетная формат 70x100 1/16.
Бумага офсетная. Объем 9 п.л. Тираж 55 000 экземпляров.

«ԶԱՆԳԱԿ-97» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ՀՀ, 0051, Երևան, Կոմիտասի պող. 49/2, հեռ.՝ (+37410) 23 25 28
Ֆաքս՝ (+37410) 23 25 95, էլ. փոստ՝ info@zangak.am, էլ. կայք՝ www.zangak.am
Գրախանութ՝ Երևան, Խանջյան փող. 29, հեռ.՝ 54 06 07, էլ. կայք՝ www.book.am

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗАНГАК-97»
РА, 0051, Ереван, пр. Комитаса 49/2, тел.: (+37410) 23 25 28
Факс: (+37410) 23 25 95, эл. почта: info@zangak.am, эл. сайт: www.zangak.am
Книжный магазин: г. Ереван, ул. Ханджяна 29, тел.: 54 06 07, эл. сайт: www.book.am

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО